Analogie-Experimente zum Thema Quantenphysik in der Schule

Wissenschaftliche Arbeit

Universität Stuttgart

5. Physikalisches Institut

im Studiengang Lehramt Physik

Fabian Demele		
Matrikelnummer: 2684217		
25.05.2016		

Betreuer: Prof. Dr. Tilman Pfau Dr. Robert Löw

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken, gegebenfalls auch elektronischen Medien, entnommen sind, sind von mir durch Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht. Entlehnungen aus dem Internet sind durch Angabe der Quelle und des Zugriffsdatums sowie dem Ausdruck der ersten Seite belegt; sie liegen zudem für den Zeitraum von 2 Jahren entweder auf einem elektronischen Speichermedium im PDF-Format oder in gedruckter Form vor.

Stuttgart, den 25.05.2016, Fabian Demele

Vorwort

Diese wissenschaftliche Arbeit zum Thema Quantenphysik in der Schule wurde im Rahmen des Schülerlabors "Spiel der Kräfte" des 5. physikalischen Institut der Universität Stuttgart erstellt. Das Schülerlabor bietet Schulklassen und Lehrern eine Möglichkeit ihr Wissen aus dem Schulunterricht zu verschiedenen Themen der Physik zu vertiefen. Zusätzlich werden Schüler durch das selbständige Experimentieren im Schülerlabor näher an die Universität heran gebracht und bekommen dadurch einen Einblick in die universitäre Forschungsarbeit.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Experiment entworfen, das entweder in eine Versuchsreihe des Schülerlabors integriert oder als selbständiges Exponat für Ausstellungen und Messen verwendet werden kann. Mit diesem wird in vereinfachter Darstellung das Prinzip der Quantenverschränkung und die Korrelationen bei einer Messung zwischen zwei klassischen Objekten aufgezeigt. Es liefert zudem einen Einblick in die Theorie der Nichtlokalität sowie der Bell-Ungleichung.

Vorab möchte ich mich bei einigen Personen bedanken, die es mir ermöglicht haben, diese Arbeit zu schreiben und die mich zu jeder Zeit durch gute Ratschläge unterstützt haben.

Vielen Dank an

- Prof. Dr. Tilman Pfau, der mich mit seiner Idee zum Bell-Versuch sehr inspiriert hat und mir bei theoretischen Fragen immer zu helfen wusste,
- Dr. Robert Löw für die sehr gute und hilfreiche Betreuung, vor allem beim Konstruieren und Entwerfen der technischen Bauteile,
- Karin Otter für die engagierte Unterstützung und Organisation,
- Stephan Schikora für viele technische Hilfen,
- die mechanische Werkstatt der Universität Stuttgart für die Beratung und das Erstellen der Bauteile,
- Dr. Axel Griesmaier für die Beratung im Bezug auf die Elektronikbauteile,
- Prof. Franz Kranzinger für viele didaktische Hinweise.

Inhaltsverzeichnis

2Schülerlabor33Theoretischer Hintergrund5 3.1 Wesenszüge der Quantenphysik5 $3.1.1$ Stochastische Vorhersagbarkeit6 $3.1.2$ Fähigkeit zur Interferenz7 $3.1.3$ Mögliche Messergebnisse8 $3.1.4$ Komplementarität9 $3.1.5$ Verschränkung und Nichtlokalität10 3.2 Theorie der Quantenmechanik und Bell-Messung11 $3.2.1$ Zustände und Polarisation11 $3.2.2$ Verschränkte Objekte13 $3.2.3$ Quantenwahrscheinlichkeiten15 $3.2.4$ EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung164Experimente23 4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen23 $4.1.2$ Versuchsaufbau27 $4.1.3$ Durchführung und Messung27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben30 $4.2.2$ Durchführung und Messung345Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten35 $5.1.1$ Klassische Korrelationsfunktion35 5.2 Farbenmodell31 5.2 Verschränkte Korrelationsfunktion34 5.2 Verschränkte Korrelationsfunktion34 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationsfunktion34 5.4 Anwendungen51 6.1 Quantencomputer52 6.1 Quantencomputer52	1	Einleitung							
3 Theoretischer Hintergrund 5 3.1 Wesenszüge der Quantenphysik 5 3.1.1 Stochastische Vorhersagbarkeit 6 3.1.2 Fähigkeit zur Interferenz 7 3.1.3 Mögliche Messergebnisse 8 3.1.4 Komplementarität 9 3.1.5 Verschränkung und Nichtlokalität 10 3.2 Theorie der Quantenmechanik und Bell-Messung 11 3.2.1 Zustände und Polarisation 11 3.2.2 Verschränkte Objekte 13 3.2.3 Quantenwahrscheinlichkeiten 15 3.2.4 EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung 16 4 Experimente 23 4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 5.1 <t< th=""><th>2</th><th>Sch</th><th>ülerlab</th><th>or</th><th>3</th></t<>	2	Sch	ülerlab	or	3				
3.1Wesenszüge der Quantenphysik53.1.1Stochastische Vorhersagbarkeit63.1.2Fähigkeit zur Interferenz73.1.3Mögliche Messergebnisse83.1.4Komplementarität93.1.5Verschränkung und Nichtlokalität103.2Theorie der Quantenmechanik und Bell-Messung113.2.1Zustände und Polarisation113.2.2Verschränkte Objekte133.2.3Quantenwahrscheinlichkeiten153.2.4EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung164Experimente234.1Bell-Messung - verschränkte Photonen234.1.2Versuchsaufbau274.1.3Durchführung und Messung274.2Bell-Messung - verschränkte Farben304.2.2Durchführung und Messung345Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten35ten355.1.15.1Photonen355.1.2Verschränkte Korrelationsfunktion385.2Farbenmodell415.2.1Klassische Korrelationsfunktion415.2.2Verschränkte Korrelationsfunktion415.3Ergebnis und Vergleich der Korrelationen516Anwendungen526.1Quantencomputer52	3	The	Theoretischer Hintergrund						
3.1.1 Stochastische Vorhersagbarkeit 6 3.1.2 Fähigkeit zur Interferenz 7 3.1.3 Mögliche Messergebnisse 8 3.1.4 Komplementarität 9 3.1.5 Verschränkung und Nichtlokalität 10 3.2 Theorie der Quantenmechanik und Bell-Messung 11 3.2.1 Zustände und Polarisation 11 3.2.2 Verschränkte Objekte 13 3.2.3 Quantenwahrscheinlichkeiten 15 3.2.4 EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung 16 4 Experimente 23 4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 5.1 Photonen 35 5.1.2 Verschränkte		3.1	Wesen	nszüge der Quantenphysik	5				
3.1.2 Fähigkeit zur Interferenz 7 3.1.3 Mögliche Messergebnisse 8 3.1.4 Komplementarität 9 3.1.5 Verschränkung und Nichtlokalität 10 3.2 Theorie der Quantenmechanik und Bell-Messung 11 3.2.1 Zustände und Polarisation 11 3.2.2 Verschränkte Objekte 13 3.2.3 Quantenwahrscheinlichkeiten 15 3.2.4 EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung 16 4 Experimente 23 4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen 23 4.1.1 Erzeugung verschränkter Photonenpaare 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.2 Durchführung und Messung 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1			3.1.1	Stochastische Vorhersagbarkeit	6				
3.1.3 Mögliche Messergebnisse 8 3.1.4 Komplementarität 9 3.1.5 Verschränkung und Nichtlokalität 10 3.2 Theorie der Quantenmechanik und Bell-Messung 11 3.2.1 Zustände und Polarisation 11 3.2.2 Verschränkte Objekte 13 3.2.3 Quantenwahrscheinlichkeiten 15 3.2.4 EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung 16 4 Experimente 23 4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen 23 4.1.1 Erzeugung verschränkter Photonenpaare 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 ten 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 34 <t< th=""><th></th><th></th><th>3.1.2</th><th>Fähigkeit zur Interferenz</th><th>7</th></t<>			3.1.2	Fähigkeit zur Interferenz	7				
3.1.4 Komplementarität 9 3.1.5 Verschränkung und Nichtlokalität 10 3.2 Theorie der Quantenmechanik und Bell-Messung 11 3.2.1 Zustände und Polarisation 11 3.2.2 Verschränkte Objekte 13 3.2.3 Quantenwahrscheinlichkeiten 15 3.2.4 EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung 16 4 Experimente 23 4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen 23 4.1.1 Erzeugung verschränkter Photonenpaare 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1.1 <t< th=""><th></th><th></th><th>3.1.3</th><th>Mögliche Messergebnisse</th><th>8</th></t<>			3.1.3	Mögliche Messergebnisse	8				
3.1.5 Verschränkung und Nichtlokalität 10 3.2 Theorie der Quantenmechanik und Bell-Messung 11 3.2.1 Zustände und Polarisation 11 3.2.2 Verschränkte Objekte 13 3.2.3 Quantenwahrscheinlichkeiten 15 3.2.4 EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung 16 4 Experimente 23 4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen 23 4.1.1 Erzeugung verschränkter Photonenpaare 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 43 <td< th=""><th></th><th></th><th>3.1.4</th><th>Komplementarität</th><th>9</th></td<>			3.1.4	Komplementarität	9				
3.2 Theorie der Quantenmechanik und Bell-Messung			3.1.5	Verschränkung und Nichtlokalität	10				
3.2.1 Zustände und Polarisation 11 3.2.2 Verschränkte Objekte 13 3.2.3 Quantenwahrscheinlichkeiten 15 3.2.4 EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung 16 4 Experimente 23 4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen 23 4.1.1 Erzeugung verschränkter Photonenpaare 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.1.4 Aufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 31 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell		3.2	Theor	ie der Quantenmechanik und Bell-Messung	11				
3.2.2 Verschränkte Objekte 13 3.2.3 Quantenwahrscheinlichkeiten 15 3.2.4 EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung 16 4 Experimente 23 4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen 23 4.1.1 Erzeugung verschränkte Photonenpaare 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion			3.2.1	Zustände und Polarisation	11				
3.2.3 Quantenwahrscheinlichkeiten 15 3.2.4 EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung 16 4 Experimente 23 4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen 23 4.1.1 Erzeugung verschränkte Photonenpaare 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2 <th></th> <th></th> <th>3.2.2</th> <th>Verschränkte Objekte</th> <th>13</th>			3.2.2	Verschränkte Objekte	13				
3.2.4 EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung 16 4 Experimente 23 4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen 23 4.1.1 Erzeugung verschränkte Photonenpaare 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 30 ten 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 32			3.2.3	Quantenwahrscheinlichkeiten	15				
4 Experimente 23 4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen 23 4.1.1 Erzeugung verschränkter Photonenpaare 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 5.5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 30 ten 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 38 35 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 43 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51			3.2.4	EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung	16				
4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen 23 4.1.1 Erzeugung verschränkter Photonenpaare 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 5.5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 30 ten 35 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 43 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 <td>4</td> <td>Ехр</td> <td>erimen</td> <td>te</td> <td>23</td>	4	Ехр	erimen	te	23				
4.1.1 Erzeugung verschränkter Photonenpaare 23 4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.1 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 4.2.2 Durchführung und Messung 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 43 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52		4.1	Bell-N	lessung - verschränkte Photonen	23				
4.1.2 Versuchsaufbau 27 4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 4.2.2 Durchführung und Messung 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52			4.1.1	Erzeugung verschränkter Photonenpaare	23				
4.1.3 Durchführung und Messung 27 4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 30 4.2.2 Durchführung und Messung 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 43 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52			4.1.2	Versuchsaufbau	27				
4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben 30 4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 43 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52			4.1.3	Durchführung und Messung	27				
4.2.1 Aufbau 30 4.2.2 Durchführung und Messung 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.3.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52		4.2	Bell-N	fessung - verschränkte Farben	30				
4.2.2 Durchführung und Messung 34 5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 ten 35 5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.3.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52			4.2.1	Aufbau	30				
5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten 35 ten 35 5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52			4.2.2	Durchführung und Messung	34				
ten355.1Photonen355.1.1Klassische Korrelationsfunktion355.1.2Verschränkte Korrelationsfunktion385.2Farbenmodell415.2.1Klassische Korrelationsfunktion415.2.2Verschränkte Korrelationsfunktion415.2.2Verschränkte Korrelationsfunktion516Anwendungen526.1Quantencomputer52	5	Kor	relatior	nsfunktionen von klassischen und verschränkten Objek-					
5.1 Photonen 35 5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 43 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52		ten			35				
5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion 35 5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 43 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52		5.1	Photo	nen	35				
5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 38 5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 43 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52			5.1.1	Klassische Korrelationsfunktion	35				
5.2 Farbenmodell 41 5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 43 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52			5.1.2	Verschränkte Korrelationsfunktion	38				
5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion 41 5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 43 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52		5.2	Farber	nmodell	41				
5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion 43 5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen 51 6 Anwendungen 52 6.1 Quantencomputer 52			5.2.1	Klassische Korrelationsfunktion	41				
5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen			5.2.2	Verschränkte Korrelationsfunktion	43				
6Anwendungen526.1Quantencomputer52		5.3	Ergeb	nis und Vergleich der Korrelationen	51				
6.1 Quantencomputer	6	Anv	vendun	gen	52				
• •		6.1	Quant	\sim sencomputer	52				

III

	$6.2 \\ 6.3$	Quantenteleportation	57 60
7	Zusa	mmenfassung und Ausblick	62
Lit	eratu	r	63
Ab	bildu	ngsverzeichnis	68
Та	belle	nverzeichnis	69
An	hang		70

1 Einleitung

Die Physik ist ein wesentlicher Bestandteil unseres alltäglichen Lebens. Sie versucht unsere Erfahrungen und Erlebnisse mit der Natur mit Hilfe von Modellen und Gesetzmäßigkeiten zu erklären. Meist reicht hierzu die klassische Physik und ihre Denkweise aus, doch in manchen Gebieten stoßt diese an Grenzen. An diesen Punkt knüpft die Quantenphysik an, die seit Anfang der zwanziger Jahre des letzten Jahrhunderts immer mehr an Bedeutung gewonnen und Anwendung gefunden hat. Durch sie wurden viele neue Erklärungen und Phänomene, wie zum Beispiel der Tunneleffekt, entdeckt. Zudem liefert sie die Grundlage für neue Technologien, wie etwa dem Quantencomputer oder der Quantenkryptografie. Die Theorie, die dahinter steckt, kann oft auf den ersten Blick nicht einsehbar und verständlich sein. Meist wird sie sogar als kontrovers oder paradox aufgefasst. [KMF03, S.72]

"Wer dem Paradoxen gegenübersteht, setzt sich der Wirklichkeit aus." [RD91]

Das Paradoxe kann vor allem in dem Gebiet der Quantenverschränkung gefunden werden. Es beschreibt die unerklärliche Interaktion zwischen mehreren Quantenobjekten, welche sich mit der klassischen Physik nicht vereinbaren lässt. Dabei können starke Korrelationen zwischen zwei Objekten auftreten, auch wenn diese kilometerweit voneinander entfernt sind. Eine große Rolle spielt vor allem das augenblickliche Senden von Informationen von einem Objekt zum anderen. Deshalb kann eine Theorie, die dieses Verhalten beschreibt, nicht von lokaler Natur sein.

Schon zu seiner Zeit entwickelte Albert Einstein ein Gedankenexperiment, das unter dem Namen "EPR-Paradoxon" bekannt wurde. In diesem werden aus einer Quelle in zwei entgegengesetzte Richtungen sogenannte verschränkte Photonen ausgesendet. Wird anschließend durch einen Polarisator die Polarisation eines Photons gemessen und dadurch festgelegt, befindet sich das andere Photon augenblicklich in der orthogonalen Polarisation. Dieses Ergebnis ist unabhängig vom eingestellten Winkel des Polarisators. Klassisch kann diese Information höchstens mit Lichtgeschwindigkeit von einem zum anderen Photon übertragen werden, was in diesem Fall keine ausreichende Erklärung liefert. Einstein beschreibt dies selbst als "spooky action at distance". Dieses Gedankenexperiment zeigt somit, dass die Quantenmechanik ohne zusätzliche Variablen keine vollständige Theorie ist. [AE35] Diese Herangehensweise zur Beschreibung der Phänomene ist eine Theorie über versteckte Parameter und damit ein Versuch, klassisch zu argumentieren. Im genannten Beispiel bedeutet dies, dass jedes Photon eine Information mit sich trägt, wodurch dieses genau weiß, welche Polarisation es bei einer bestimmten Messung einnehmen soll. Nach diesem Prinzip müssten allerdings unendlich viele versteckte Parameter vorhanden sein, um alle möglichen Kombinationen abzudecken. Erst im Jahr 1965 erbrachte John Bell die nötigen mathematischen Kriterien, um überprüfen zu können, ob Messungen und Ergebnisse mit klassischen Methoden, beziehungsweise versteckten Parametern, vereinbar sind. Dazu formulierte er eine Formel, die als Bell-Ungleichung bezeichnet wird. Mit dieser können Annahmen zur Quantenmechanik getestet und somit der Beweis erbracht werden, dass diese Theorie durch Hinzufügen von versteckten Parametern zu keiner realistischen lokalen Theorie ergänzt werden kann. [Bel64]

In Rahmen dieser Arbeit wird ein Analogie-Versuch entwickelt, der die klassische Bell-Messung an verschränkten Photonenpaaren für Schüler und Lehrer in vereinfachter Form darstellt. Da in diesem Analogie-Versuch mit klassischen Methoden wie Farben und Lichtintensität anstatt von Photonen gearbeitet wird, können keine Resultate erwartet werden, die der Quantenmechanik und Quantenobjekten entsprechen. Das Ziel soll vielmehr sein, das Prinzip der Verschränkung und Nichtlokalität zu veranschaulichen und anschließend einen Ausblick auf die realen Effekte zu geben. Als Analogie zu den verschränkten Photonen werden zwei Lichtteilchen verwendet, die aus rotem bzw. grünem Licht bestehen. Diese sollen den orthogonalen Photonenspins entsprechen. Auch an diesen klassischen Farbteilchen kann eine Bell-Messung durchgeführt werden und dabei gewisse Korrelationen festgestellt werden.

2 Schülerlabor

Das Schülerlabor "Spiel der Kräfte" der Universität Stuttgart wurde 2009 gegründet und ist ein Teilprojekt eines geförderten Sonderforschungsbereichs der Grundlagenforschung zur Quantenphysik. Es ist dem 5. Physikalischen Institut der Universität Stuttgart zugeordnet und bietet interessierten Schülern, Studenten und Lehrern die Möglichkeit, an die Universität zu kommen und Experimente durchzuführen. Dabei werden interessante Phänomene der Physik vermittelt, welche über die Schulphysik hinausgehen können. Alternativ kann auch ein Thema aus dem Unterricht durch eine Versuchsreihe vertieft oder wiederholt werden. Dafür wurden im Laufe der letzten Jahre zahlreiche Versuchsreihen konzipiert. Mittlerweile können zu folgenden Themen Experimente durchgeführt werden:

- Lichtdetektive (Klasse 3/4, Klasse 5)
- Bionik (Klasse 3/4)
- Balance (Klasse 3/4)
- Die Analogie von Impuls und Drehimpuls (Klasse 9/10)
- Aerodynamik (Klasse 9/10)
- Energie (Klasse 9/10)
- Beugung und Interferenz von Laserlicht (Klasse 11)
- Digitale Elektronik (Klasse 11)
- Akustik (Klasse 11)
- Teilchenfalle (Klasse 11)

Schülerlabore haben einen positiven Lerneffekt für Schüler. Dies zeigt sich auch durch die stetig wachsende Nachfrage und die Entstehung von mehr als 200 Einrichtungen dieser Art deutschlandweit in den letzten Jahren. [Gud08] Die Ziele eines Schülerlabors sind facettenreich. Zum einen soll das Interesse und die Aufgeschlossenheit von Schülern, insbesondere gegenüber den Themen Naturwissenschaften und Technik, geweckt werden. Zudem wird durch eine Arbeitsatmosphäre, die den realen Forschungslaboren der Universität ähnlich ist, eine selbständige und aktivierende Arbeitsweise der Schüler gefördert. In den meisten Fällen werden den Schulklassen auch Laborführungen in dem physikalischen Institut angeboten. Dabei erhalten sie Einblicke in die aktuelle Forschung und können sehen, welche Bedeutung die Wissenschaft und Technik für unsere Gesellschaft hat. Dadurch steigt auch bei dem ein oder anderen Schüler das Interesse, sich an einem naturwissenschaftlichen oder technischen Beruf beziehungsweise Studium zu versuchen. Doch nicht nur für Schüler bietet das Schülerlabor Vorteile. Lehrkräfte und Studenten können durch die Versuchsreihen ihr Wissen vertiefen und die erlernte Theorie an Experimenten testen. Zudem erhalten Lehrkräfte Fortbildungen zu den verschiedenen Themen und dadurch mögliche Anregungen zur Unterrichtsplanung und Gestaltung. [Gud08]

Die positive Wirkung von Schülerlaboren kann trotz großer Unterschiede und bedingt vergleichbaren Konzepten untereinander festgestellt werden. Das Hauptaugenmerk wird dabei auf die Nachhaltigkeit der Effekte, den Altersunterschied und die Fächerunterschiede gelegt. Für jedes Schülerlabor ist es wichtig, konkrete Zielvorstellung zu haben. Insbesondere sollte dabei die Vor- und Nachbereitung des Wissens immer vorhanden sein, um die Kurzfristigkeit der Effekte zu vermeiden. Somit können Exkursionen zu Schülerlaboren pädagogisch und didaktisch wertvolle Ergänzungen darstellen, die gezielt in den Unterricht eingebaut werden können. [Gud08]

Um dies auch im Bezug zur Quantenmechanik fortführen zu können, wird seit einiger Zeit an einer Versuchsreihe zu diesem Thema gearbeitet. Dabei konnten in den vergangenen Jahren diverse Versuche wie der Quantenradierer, ein Elektroneninterferometer oder ein Polarisationsdreher erstellt werden. In diesen Versuchen wird hauptsächlich die Interferenz, Komplementarität und Superposition gezeigt. Deshalb wird diese Reihe durch einen Versuch zur Verschränkung und Nichtlokalität ergänzt.

3 Theoretischer Hintergrund

3.1 Wesenszüge der Quantenphysik

Die Quantenphysik und ihre Phänomene lassen sich in mehrere Wesenszüge untergliedern. Der bekannteste Wesenszug ist die Quantelung, welche die Trennung einer Gesamtheit in kleinere Teile beschreibt. Dieser Wesenszug ist schon aus dem Alltag sehr vertraut und kann bei einfachen Experimenten, wie dem Franck-Hertz-Versuch und der Aufspaltung in diskrete Energieniveaus bei Atomen, leicht festgestellt werden. Zudem wird seine Auswirkung auf Messergebnisse von dem Wesenszug 3 aufgefasst. Daher wird auf diesen Wesenszug nicht weiter eingegangen.

Die übrigen Eigenschaften der Quantenphysik können unter folgenden Wesenszügen zusammengefasst werden:

- Wesenszug 1: Stochastische Vorhersagbarkeit
- Wesenszug 2: Fähigkeit zur Interferenz
- Wesenszug 3: Mögliche Messergebnisse
- Wesenszug 4: Komplementarität
- Wesenszug 5: Verschränkung und Nichtlokalität

In dieser wissenschaftlichen Arbeit liegt der Fokus auf der Verschränkung und Nichtlokalität. Die übrigen Wesenszüge werden im Folgenden am Doppelspalt-Experiment in kurzer Form aufgezeigt, da das Verständnis über diese notwendig für den weiteren Verlauf dieser Arbeit ist.



Abbildung 1: Versuchsaufbau Doppelspalt-Experiment [Sei13]

In diesem Versuch sendet eine Lichtquelle Photonen auf eine Trennwand. Auf dieser befinden sich im Abstand d zwei Spalte. Hinter der Trennwand ist parallel ein Schirm angebracht, auf welchem das Beugungsbild ersichtlich wird. Nach den Regeln des Schattenwurfes, werden auf dem Schirm zwei beleuchtete helle Streifen erwartet, die durch einen dunklen getrennt sind. In Wirklichkeit erscheint jedoch das Muster, welches in Abbildung 2 dargestellt ist: [Cor00]



Abbildung 2: Interferenzmuster Doppelspalt: In der Mitte bildet sich ein Intensitätsmaxima (nullte Ordnung). Die seitlichen hellen Streifen werden von innen nach außen als Maximum erster, zweiter, dritter usw. Ordnung bezeichnet. Es lässt sich erkennen, dass die Intensität der Maxima nach außenhin abnimmt. [sci]

Dieses Muster entsteht durch die Beugung und Interferenz des Lichtes. Daraus folgt, dass Licht auch Eigenschaften von Wellen besitzen muss. Nach dem huygensschen Prinzip ist jeder einzelne Spalt ein neuer Ausgangspunkt einer kugelförmigen Elementarwelle. Diese neuen Wellen durchlaufen zu fast jedem Punkt auf dem Schirm unterschiedlich lange Strecken. Diese Differenz wird als Gangunterschied bezeichnet. Es kommt zu einer Interferenz, die je nach Unterschied der Weglängen eine Verstärkung oder Abschwächung des Lichts zur Folge hat. Dies wird auch als konstruktive bzw. destruktive Interferenz bezeichnet.

Dieser Versuch zeigt, dass Licht nicht nur Teilcheneigenschaften, sondern auch Welleneigenschaften besitzt. Dies ist unter dem Begriff **Welle-Teilchen-Dualismus** bekannt. Mit diesem Ergebnis können die ersten vier Wesenszüge der Quantenmechanik verdeutlicht werden. [Cor00]

3.1.1 Stochastische Vorhersagbarkeit

Werden einzelne Photonen betrachtet, die durch den Doppelspalt fliegen, treffen diese als einzelne Punkte auf dem Schirm auf. Den Ort des Auftreffens für das nächste Photon kann nur erraten werden. Eine Vorhersage ist reine Glückssache. Wie auf dem Interferenzbild zu sehen ist, gibt es Bereiche (Maxima), bei denen ein Auftreffen wahrscheinlicher ist, als in anderen Bereichen. Diese zwei Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Einzelereignisse in der Quantenphysik können in der Regel nicht vorhergesagt werden
- Nach mehreren Durchgängen einer Messung lässt sich allerdings eine Verteilung festlegen, die bis auf stochastische Schwankungen reproduzierbar ist

Im Gegensatz zur klassischen Mechanik, bei welcher der Ausgang eines Experimentes grundsätzlich festgelegt ist, finden in der Quantenphysik lediglich Ereignisse statt, die vom Zufall bestimmt sind. [KMF03]

Beschrieben wird die Wahrscheinlichkeit für das Auftreffen auf dem Schirm durch eine Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}, t)$. Diese besitzt eine statistische Deutung und ist nicht mit "realen" Wellen vergleichbar. Die Wahrscheinlichkeit \mathbb{P} für das Auftreffen eines Photons an einem bestimmten Punkt \vec{r} lässt sich durch das Betragquadrat $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ der Wellenfunktion berechnen. [Mü10]

3.1.2 Fähigkeit zur Interferenz

Die Interferenz beim Doppelspalt entsteht durch die zwei einzelnen Spalte, bei denen neue Elementarwellen gebildet werden. Diese Elementarwellen überlagern sich und interferieren. Wird einer der beiden Spalte geschlossen, verschwindet das Interferenzmuster. Dabei muss keine kontinuierliche Quelle betrachtet werden, da Interferenz auch bei einzelnen Quantenobjekten, wie Elektronen, beobachtet werden kann. Daher lässt sich Folgendes zusammenfassen: [KMF03]

• Einzelne Quantenobjekte können Interferenzmuster erzeugen. Dies ist der Fall, wenn für ein Versuchsergebnis mehr als eine klassisch denkbare Möglichkeit existiert, damit dieses eintritt

In diesem Fall gibt es für beide Spalte eine Wellenfunktion, die man mit Ψ_1 und Ψ_2 bezeichnet. Für die Quantenobjekte, welche zwei klassische Möglichkeiten haben, um zum Schirm zu gelangen, entsteht eine Gesamtwellenfunktion durch die Superposition $\Psi(\vec{r},t) = \Psi_1(\vec{r},t) + \Psi_2(\vec{r},t)$ der beiden einzelnen Wel-



8

lenfunktionen. Daraus ergibt sich die Auftreffwahrscheinlichkeit am Ort \vec{r} zu:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\vec{r},t) &= |\Psi(\vec{r},t)|^2 \\ &= |\Psi_1(\vec{r},t) + \Psi_2(\vec{r},t)|^2 \\ &= |\Psi_1(\vec{r},t)|^2 + |\Psi_2(\vec{r},t)|^2 + \Psi_1^*(\vec{r},t) \cdot \Psi_2(\vec{r},t) + \Psi_1(\vec{r},t) \cdot \Psi_2^*(\vec{r},t) \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeit setzt sich also aus der Summe für die Einzelwahrscheinlichkeiten der beiden Spalte, sowie aus zwei Interferenztermen, zusammen. [Mü10]

3.1.3 Mögliche Messergebnisse

Tritt eine Interferenz auf, gibt es mehrere klassisch denkbare Möglichkeiten für Quantenobjekte. Im Falle des Doppelspalt-Experiments sind dies die zwei unterschiedlichen Wege durch die einzelnen Spalte. Wird ein Auftreffen eines Photons auf dem Schirm gemessen, stellt sich die Frage, ob sein Weg durch den linken oder rechten Spalt geführt hat. Um dies zu überprüfen, kann hinter jeden Spalt ein Messgerät gestellt werden, um somit das durchfliegende Photon zu markieren. Wird das markierte Quantenobjekt schließlich auf dem Schirm gemessen, ist das Ergebnis bezüglich dieser Messung immer eindeutig. Es wird sozusagen durch die Markierung präpariert, dass es stets das gleiche Ergebnis zeigt, wenn dieselbe Messung erneut durchgeführt wird. Im Gegensatz zur klassischen Physik, bei der die Messung in der Quantenmechanik einer von vielen möglichen Zuständen festgelegt. Es gilt also: [KMF03]

- Alle Messergebnisse von Quantenobjekten sind stets eindeutig bestimmt, obwohl sich diese in einem Zustand befinden können, welcher bezüglich einer gemessenen Größe unbestimmt ist
- Wird eine Messung an einem Quantenobjekt wiederholt, führt diese zum

8

selben Ergebnis wie zuvor, solange das Quantenobjekt nicht zwischenzeitlich beeinflusst wurde

3.1.4 Komplementarität

Beim Doppelspalt-Experiment können also die durchfliegenden Quantenobjekte markiert werden, um festzustellen, welchen Weg sie genommen haben. Diese Messung hat allerdings auch Auswirkungen auf das Experiment und dessen Ergebnis. Werden die Quantenobjekte markiert, kollabiert die Wellenfunktion und das Interferenzmuster verschwindet. Es ergibt sich als Messergebnis lediglich die Summe der beiden Einzelspaltmuster. Trotz mehreren klassisch denkbaren Möglichkeiten tragen diese modifizierten Quantenobjekte nicht zum Interferenzmuster bei. Solang man ihnen zum Zeitpunkt der Messung auf dem Schirm eine klassisch denkbare Möglichkeit zuordnen kann, in diesem Fall ihren Durchgangsspalt, kann kein Interferenzmuster beobachtet werden. Folglich kann für Quantenobjekte gesagt werden:

• Ein Interferenzmuster und die Unterscheidbarkeit von klassisch denkbaren Möglichkeiten schließen sich aus

Dabei muss eine Markierung oder Messung von Informationen nicht direkt stattfinden, sondern es sollte lediglich eine Zuordnung möglich sein. Eine Information für die Zuordnung der klassich denkbaren Möglichkeiten wird oft auch als "Welcher-Weg"-Information bezeichnet. Es muss allerdings nicht an einen Weg im klassichen Sinne gedacht werden, sondern vielmehr an die verschiedenen Möglichkeiten, die existieren. Dieses Phänomen kann mit Hilfe eines Quantenradierers am Doppelspalt demonstriert werden. [KMF03]

Komplementarität bezeichnet in der Quantenmechanik die Eigenschaft, dass von einem Quantenobjekt oder einem System aus mehreren Quantenobjekten verschiedene Messgrößen, wie zum Beispiel Impuls und Ort, gleichzeitig nicht genau gemessen werden können. Dies wird auch in der Heisenbersgschen Unschärferelation beschrieben. Wird der Ort eines Quantenobjektes gemessen, ist dies mit einer ungenauen Kenntnis des Impulses verbunden. Es gibt eine Grenze für die Bestimmung dieser beiden Messgrößen. Heisenberg hat dies in seiner Ungleichung formuliert:

$$\Delta p \cdot \Delta x \ge \frac{\hbar}{2} \tag{3.1}$$

Je schärfer und genauer die Messung des Ortes ist, desto unschärfer wird die Messung des Impulses. Wolfgang Pauli kommentierte dies und folgerte, dass mit einem Auge der Impuls und mit dem anderen Auge der Ort gesehen werden kann. Werden allerdings beide Augen gleichzeitig geöfnet, wird man irre. [Mü10]

3.1.5 Verschränkung und Nichtlokalität

Wird eine Kraft auf einen Körper ausgeübt, wird eine gewisse Wirkung erzielt. Es gelingt allerdings nicht, diese Einwirkung augenblicklich stattfinden zu lassen. Kräfte oder ähnliche Einwirkungen können sich maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Das bedeutet, dass sich Veränderungen in einer gewissen Zeit nur in unmittelbarer Nähe ausbreiten. Änderungen an einer bestimmten Stelle können sich somit nur lokal ausüben. Es gilt also:

- In der klassischen Physik gibt es nur Nahwirkungen, die sich maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Dies wird als lokale Theorie bezeichnet
- Dies bezeichnet dies als Lokale Theorie

In der Quantenphysik treten allerdings auch Erscheinungen auf, bei denen eine Nichtlokale Theorie zu Grunde liegt. Dabei treten Fernwirkungen zwischen Quantenobjekten auf, bei denen eine Ursache an einem Objekt, eine augenblickliche Wirkung auf ein weit entferntes Objekt mit sich zieht.

Diese Fernwirkungen finden statt, wenn zwei Quantenobjekte miteinander verschränkt sind. Verschränkung bedeutet, dass zwei Objekte in irgendeiner Weise miteinander verbunden sind. Bei Messungen der beiden Quantenobjekte treten gewisse Korrelationen auf. [KMF03]

3.2 Theorie der Quantenmechanik und Bell-Messung

3.2.1 Zustände und Polarisation

In der Quantenmechanik werden physikalische Zustände durch Vektoren in einem Hilbertraum \mathcal{H} beschrieben. Ein Hilbertraum ist ein Vektorraum über einem Körper K, der mit einem Skalarprodukt versehen ist. In ihm gelten die Vektorraum-Axiome, was physikalischen Zuständen das Superpositionspinzip ermöglicht. Es gibt verschiedene Notationen eines physikalischen Zustandes. In dieser Arbeit wird die Diracnotation verwendet, welche auf den Physiker P. A. M. Dirac zurückzuführen ist. Dabei wird wie folgt notiert: [Mü10]

Vektoren aus
$$\mathcal{H}$$
: $|\psi\rangle$, $|\alpha\rangle$, ...
Skalarprodukte: $(\psi_1, \psi_2) = \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$
Matrixelemente: $(\chi, A\psi) = \langle \chi | A | \psi \rangle$
Projektoren: $P_{\psi} = |\psi\rangle \langle \psi|$

Aufgrund der Klammern $\langle \cdot |$ und $| \cdot \rangle$ wird diese Schreibweise auch Bra-Ket-Notation, aus dem Englischen ("bracket"), genannt.

Mit Hilfe des Superpositionsprinzips kann in dieser Schreibweise jeder Zustand durch eine Linearkombination der Grundzustände wie folgt ausgedrückt werden:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i |\psi\rangle_i \tag{3.2}$$

Dabei bezeichnet $|\Psi\rangle$ einen beliebigen physikalischen Zustand und $|\psi\rangle_i$ die Grundzustände im Hilbertraum \mathcal{H} mit der Dimension n. Die Koeffizienten c_i sind komplexe Zahlen und werden als Wahrscheinlichkeitsamplituden bezeichnet. Dabei gibt $|c_i|^2$ die Wahrscheinlichkeit an, den Zustand $|\Psi\rangle$ in der Basis $|\psi\rangle_i$ zu messen.

Mit dieser Schreibweise kann auch die Polarisation einer klassischen elektromagnetischen Welle angegeben werden. Dazu reichen zwei orthogonale Vektoren aus, die eine horizontale und vertikale Polarisationsrichtung definieren. Aus diesen Vektoren wird ein zweidimensionaler Hilbertraum aufgespannt, in welchem die Zustände durch folgende Linearkombination beschrieben werden:

$$|\Psi\rangle = c_1 |H\rangle + c_2 |V\rangle \tag{3.3}$$

Dabei sind $|H\rangle = \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}$ und $|V\rangle = \begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängige, orthogonale und normierte Basisvektoren. Dies bedeutet, dass $\langle H | V \rangle = 0$ und $\langle H | H \rangle =$

 $\langle V | V \rangle = 1.$

In der Quantenmechanik ist die Polarisation der Spin des Photons, daher die Bezeichnung H (horizontal) und V (vertikal). Bei der Bell-Messung werden allerdings auch Zustände gemessen, die andere Vektoren als Basis besitzen. Es muss eine Basistransformation erfolgen. Interessant sind Vektoren, die um einen Winkel α in Bezug auf die Vektoren H und V gedreht sind. Um den Zustand in dieser Basis beschreiben zu können, wird wie folgt transformiert:

$$|H\rangle = \cos(\alpha) |\alpha^{\perp}\rangle - \sin(\alpha) |\alpha^{\perp}\rangle$$
 (3.4)

$$|V\rangle = \sin(\alpha) |\alpha\rangle + \cos(\alpha) |\alpha^{\perp}\rangle \tag{3.5}$$

Auch für die neue Basis gilt die Orthogonalität und Normierung. Das Prinzip der Basistransformation kann mit Hilfe von Abbildung 5 nochmals erklärt werden:



Abbildung 5: Drehung: Die Basisvektoren $|V\rangle$ und $|H\rangle$ werden um einen Winkel α gedreht. Dadurch entsteht eine neue Basis $(|\alpha\rangle, |\alpha_{\perp}\rangle)$, die als Linearkombination mit entsprechenden Anteilen der Ausgangsbasis dargestellt werden kann. [Dem16]

In der Quantenmechanik werden die Messgrößen wie Impuls P, Energie E, oder Ort Q als Observablen bezeichnet. Diese sind folglich physikalische Größen, welche an einem Zustand gemessen werden können. Die Messung wird durch sogenannten Operatoren A ausgeführt, die im \mathcal{H} -Raum wirken. Die Ergebnisse können nur Eigenwerte a der zugehörigen Observablen sein:

$$A \left| \Psi \right\rangle = a \left| \Psi \right\rangle$$

Die Messwerte sind allerdings statistisch verteilt, weshalb eine große Anzahl an Messungen benötigt wird, um aussagekräftige Aussagen treffen zu können.

3.2.2 Verschränkte Objekte

In der Quantenmechanik lassen sich nicht nur einzelne Objekte beschreiben, sondern auch Systeme aus mehreren Teilen. Wie bei einzelnen Photonen liegt auch bei einem Photonenpaar ein Hilbertraum zu Grunde. Dieser setzt sich als Tensorprodukt der einzelnen Hilberträume der Photonen zusammen: [Bec12]

$$H_{gesamt} = H_1 \otimes H_2 \tag{3.6}$$

Bei zwei Photonen ist der \mathcal{H} -Raum vierdimensional und besitzt folgende Basisvektoren:

$$\begin{split} |H\rangle_1 \otimes |H\rangle_2 &= \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} = |HH\rangle, \qquad |H\rangle_1 \otimes |V\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = |HV\rangle \\ |V\rangle_1 \otimes |H\rangle_2 &= \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = |VH\rangle, \qquad |V\rangle_1 \otimes |V\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\1 \end{pmatrix} = |vV\rangle \end{split}$$

Es existieren allerdings auch Zustände, die nicht als Tensorprodukt von Hilberträumen dargestellt werden können. Diese werden als verschränkte Zustände bezeichnet.

Bereits im Jahre 1935 erläuterte Erwin Schrödinger den Begriff der Verschränkung mit folgender Definition:

"Wenn zwei getrennte Körper, die einzeln maximal bekannt sind, in eine Situation kommen, in der sie aufeinander einwirken und sich wieder trennen, dann kommt regelmäßig das zustande, was ich eben Verschränkung unseres Wissens um die beiden Körper nannte." [Sch35]

Quantenobjekte besitzen also eine Beziehung untereinander, welche eine Art von Kopplung darstellt. Solche Zustände werden zum Beispiel durch eine bestimmte Superposition erzeugt:

$$|\Psi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle - |VH\rangle) \tag{3.7}$$

Es zeigt sich, dass sich das Photonenpaar in einem Zustand befindet, bei dem die Polarisationsrichtungen jeweils orthogonal zueinander sind. Ein Photon ist horizontal, das andere vertikal polarisiert. Welches sich jedoch in welchem Zustand befindet, ist zufällig. Des weiteren spielt es auch keine Rolle in welcher Basis gemessen wird. Analog zu einer Drehung um den Winkel α ergibt sich:

$$|\Psi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha \alpha^{\perp}\rangle - |\alpha^{\perp} \alpha\rangle)$$
(3.8)

Dies bedeutet, dass wenn sich die Polarisation eines Photons ändert , sich das andere Photon automatisch und augenblicklich die orthogonale Polarisation einnimmt. Dabei ist es irrelevant, wie weit das Photonenpaar voneinander entfernt ist. Es kann somit eine gewisse Korrelation zwischen diesen zwei Photonen festgestellt werden.

Interessant sind Zustände, welche eine maximale Verschränkung besitzen. Es gibt insgesamt vier davon, die als Bell-Zustände bezeichnet werden. Sie haben folgende Form:

$$|\Psi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|HV\rangle - |VH\rangle) \tag{3.9}$$

$$|\Psi^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle) \tag{3.10}$$

$$|\Phi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle - |VV\rangle) \tag{3.11}$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle) \tag{3.12}$$

Dabei wird das Photonenpaar als positiv korreliert bezeichnet, wenn die zwei Photonen eine parallele Polarisation besitzen. Bei senkrechter Polarisation wird hingegen von negativer Korrelation gesprochen. Zwischen den Bell-Zuständen kann transformiert werden. Dies geschieht mit Hilfe einer Übergangsmatrix **M**, die folgende Form hat:

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha)e^{i\delta} & \cos(\alpha)e^{i\delta} \end{pmatrix}$$
(3.13)

Dabei bezeichnet α den Winkel zu $|H\rangle$ und δ die Phasenverschiebung zwischen $|\alpha\rangle$ und $|\alpha^{\perp}\rangle$. Wird von einem Grundzustand wie beispielsweise $|\Psi^{-}\rangle$ ausgegangen, kann mit folgenden Werten transformiert werden:

$$|\Psi^{-}\rangle \rightarrow |\Psi^{-}\rangle: \quad (\alpha = 0, \delta = 0) \quad \Rightarrow \quad M_{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(3.14)

$$|\Psi^{-}\rangle \rightarrow |\Psi^{+}\rangle: \quad (\alpha = 0, \delta = \pi) \quad \Rightarrow \quad M_{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
(3.15)

$$|\Psi^{-}\rangle \rightarrow |\Phi^{-}\rangle: \quad (\alpha = \frac{\pi}{2}, \delta = 0) \quad \Rightarrow \quad M_{3} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
(3.16)

$$|\Psi^{-}\rangle \rightarrow |\Phi^{+}\rangle: \quad (\alpha = \frac{\pi}{2}, \delta = \pi) \quad \Rightarrow \quad M_{4} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(3.17)

Experimentell lässt sich eine Transformation durch eine Kombination von verschiedenen Verzögerungsplättchen $\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ erreichen.

3.2.3 Quantenwahrscheinlichkeiten

Die Quantenwahrscheinlichkeit bildet das Grundwerkzeug für alle folgenden Berechnungen. Wie in Kapitel 3.1 erwähnt, kann jeder Zustand aus einer Linearkombination der Grundzustände gebildet werden. Für ein einzelnes Photon kann somit die Polarisation im Winkel $\alpha = 45^{\circ}$ als eine Kombination der horizontalen und vertikalen Richtung dargestellt werden:

$$|+45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \tag{3.18}$$

Die Wahrscheinlichkeit dieses Photon nun in horizontaler Polarisation vorzufinden berechnet wird wie folgt berechnet: [Bec12]

$$\mathbb{P}(H, |+45\rangle) = |\langle H| + 45\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$$
(3.19)

Für korrelierte Zustände eines verschränkten Photonenpaares wird die Wahrscheinlichkeit ähnlich bestimmt. Befindet sich dieses Paar zum Beispiel im Zustand $|\Psi^{-}\rangle$ kann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass bei einer

Messung das Photon 1 in Richtung α und das Photon 2 in Richtung β polarisiert ist. Dies wird folgendermaßen bezeichnet:

$$\mathbb{P}(\alpha,\beta) = |\langle \beta |_2 \langle \alpha |_1 | \Psi^- \rangle|^2$$
(3.20)

Mit Gleichung (2.3) und (2.4) ergibt sich diese Wahrscheinlichkeit zu:

$$\mathbb{P}(\alpha, \beta) = |\langle \beta |_2 \langle \alpha |_1 | \Psi^- \rangle|^2$$

= $\frac{1}{2} (\cos(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cos(\beta))$
= $\frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta)$ (3.21)

Analog werden für die anderen Bell-Zustände folgende Wahrscheinlichkeiten bestimmt:

$$|\Psi^+\rangle: \quad \mathbb{P}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\sin^2(\alpha+\beta)$$
 (3.22)

$$|\Phi^{-}\rangle$$
: $\mathbb{P}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\cos^{2}(\alpha+\beta)$ (3.23)

$$|\Phi^+\rangle: \quad \mathbb{P}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta)$$
 (3.24)

Diese Wahrscheinlichkeiten können durch Messungen bestimmt werden. Sie finden Anwendung in der Überprüfung der Bell'schen Ungleichung.

3.2.4 EPR Paradoxon und Bell-Ungleichung

Das EPR-Paradoxon von Einstein, Podolsky und Rosen aus dem Jahr 1935 beschäftigt sich mit dem Thema, ob die Quantenmechanik eine vollständige Theorie sei. Die Kriterien zur Überprüfung waren für die Autoren: [AE35]

- Ist die Theorie korrekt?
- Ist die Beschreibung durch diese Theorie vollständig?

Treffen beide Aussagen zu, gilt die Theorie als zufriedenstellend. Die erste Frage kann mit alltäglichen Erfahrung und physikalischen Experimenten überprüft werden. Für die zweite Frage muss zunächst definiert werden, was vollständig bedeutet. Dies wird durch folgendes Kriterium beschrieben: [AE35]

"Every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory"

Dies bedeutet, wenn ein physikalisches reales Element nicht durch eine Theorie beschrieben werden kann, ist diese Theorie nicht vollständig. Dies fordert eine weitere Definition, welche ein reales Element definiert: [AE35]

"If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainity (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity."

Real bedeutet in diesem Sinne, dass mit Sicherheit das Ergebnis oder der Ausgang einer Messung dieser physikalischen Größen vorhergesagt werden kann, ohne eine Messung durchführen zu müssen.

Bei diesem Gedankenexperiment werden dabei die Grenzen der Quantenmechanik aufgezeigt. Die Idee beinhaltet zwei Teilchen, zum Beispiel Photonen, die nach einer kurzen Wechselwirkung miteinander in entgegengesetzte Richtungen ausgesendet werden. Eine Messung am ersten Teilchen hat eine Veränderung des zweiten Teilchens zur Folge oder umgekehrt. Wird etwa die Polarisation von Photon 1 gemessen, nimmt das Photon 2 augenblicklich die orthogonale Polarisation ein. Der Ausgang des Experiments wird also von der Messung an einem Photon beeinflusst und ist deshalb nicht mit der physikalischen Realität vereinbar. Die Theorie kann somit nicht vollständig sein. Es kommt die Frage auf, ob und wie weit sich die Quantenmechanik und ihre statistischen Aussagen auf die klassische Statistik zurückführen lässt. Deshalb zog Einstein die Möglichkeit in Betracht, sogenannte versteckte Variablen einzubeziehen, sodass der Ausgang der Messung doch bestimmt ist. Das lag vor allem an seiner Überzeugung, dass es keinen fundamentalen Zufall geben kann, was er durch seine Formulierung "Gott würfelt nicht" zum Ausdruck brachte. Mit diesen versteckten Variablen vermutete er eine Absprache der beiden Teilchen bei ihrer Wechselwirkung beziehungsweise geheime Informationen, die jedes Teilchen mit sich zog. [Bel64]

Der Frage nach versteckten Variablen widmete sich John Bell. Er untersuchte, inwiefern sich in einem Experiment eine lokal-realistische Theorie (LRT) überprüfen lässt. Dies gelang ihm im Jahre 1964, als er eine mathematische Relation formulierte, die den Unterschied zwischen lokal-realistischen Theorien mit versteckten Variablen und der nicht-lokalen Quantentheorie aufzeigt. Diese Relation wird als Bellsche-Ungleichung bezeichnet. Für die Entdeckung und Herleitung seiner Ungleichung verwendete Bell das EPR-Paradoxon. Mit dieser Ungleichung und diversen Experimenten kann gezeigt werden, dass es keine lokale verborgene Parameter geben kann, welche mit den statistischen Vorhersagen der Quantenmechanik harmonieren. Somit ist sie nach den Kriterien von Einstein keine vollständige Theorie.

Es existieren viele verschiedene Formen der Bell-Ungleichung. In dieser Arbeit wird die sogenannte Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) Ungleichung verwendet, da diese direkt auf Messungen und Messwerte angewendet werden kann. Für die Herleitung wird wieder das Gedankenexperiment von Einstein, Podolsky und Rosen betrachtet. Den Aufbau zeigt Abbildung 6.



Abbildung 6: Aufbau EPR Gedankenexperiment [Dem16]

Zwei miteinander verschränkte Photonen werden in entgegengesetzte Richtungen von einer Quelle ausgesendet. Beide durchlaufen auf ihrer Seite eine Messapparatur, welche mit **A** und **B** bezeichnet werden. Meist werden diese zwei Messapparaturen als "Alice" und "Bob" benannt. Jedes Photon durchläuft einen Polarisator mit einem eingestellten Winkel, der mit α beziehungsweise β bezeichnet wird, und anschließend einen Strahlteilerwürfel. Bei diesem Würfel kann das Photon entweder reflektiert oder transmittiert werden. Beide Wege sind mit einem Detektor versehen, welcher das Ergebnis +1 (transmitiert) oder -1 (reflektiert) notiert.

Es wird davon ausgegangen, dass die Korrelation zwischen den beiden Photonen in der Quelle ensteht und in verborgenen Parametern, bezeichnet mit λ , gespeichert wird. Diese Informationen trägt jedes Photon mit sich und kann nicht eingesehen werden. Wenn es eine realistische Theorie ist, sollte es durch Messungen und Experimente möglich sein, diesen Variablen einen Wert zuzuordnen. Alle λ seien mit der Funktion $\rho(\lambda)$ über die beiden Photonen verteilt. Die Erwartungswerte der einzelnen Photonen unter einem bestimmten Winkel bezeichnet werden mit $A(\alpha, \lambda)$ beziehungsweise $B(\beta, \lambda)$ bezeichnet. Dabei gilt stets: [Bag04]

$$\int \rho(\lambda)d\lambda = 1, \quad |A(\alpha,\lambda)| \le 1, \quad |B(\beta,\lambda) \le 1$$
(3.25)

Es kann davon ausgegangen werden, dass die Messungen und Ergebnisse der einzelnen Photonen unabhängig voneinander sind. Das bedeutet, dass Messung A nur von α und λ abhängt, jedoch nicht von $B(\beta, \lambda)$, genauso umgekehrt. Wird nun eine gemeinsame Messung an beiden Photonen vorgenommen, bestimmt sich der Erwartungswert $E(\alpha, \beta, \lambda)$ dieses Experiments aus dem Produkt von $A(\alpha, \lambda)$ und $B(\beta, \lambda)$. Um dieses unabhängig von λ zu bestimmen, muss diese Variable eliminiert werden. Dies gelingt, indem die Ergebnisse von vielen Photonenpaaren gemittelt werden, beziehungsweise über alle λ integriert wird:

$$E(\alpha,\beta) = \int A(\alpha,\lambda)B(\beta,\lambda)\rho(\lambda)d\lambda \qquad (3.26)$$

Diese Vorgehensweise setzt eine große Anzahl an Messungen voraus, sodass man ausgegangen werden kann, dass alle möglichen Werte von λ vorkommen. Wird eine neue Messungen mit anderen Winkeln α' und β' betrachtet, ergibt sich die Differenz der Erwartungswerte zu:

$$\Delta E_1 = E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta') = \int [A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda) - A(\alpha, \lambda)B(\beta', \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda$$
$$= \int A(\alpha, \lambda)[B(\beta, \lambda) - B(\beta', \lambda)]d\lambda \qquad (3.27)$$

Wird nun auf beiden Seiten der Betrag angewendet und die Beziehungen aus Gleichung (3.25) verwendet, kann mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgendes Ergebnis festgehalten werden:

$$\begin{aligned} \left| E(\alpha,\beta) - E(\alpha,\beta') \right| &= \left| \int A(\alpha,\lambda) [B(\beta,\lambda) - B(\beta',\lambda)] d\lambda \right| \\ &\leq \int \left| A(\alpha,\lambda) \right| \left| [B(\beta,\lambda) - B(\beta',\lambda)] \right| d\lambda \\ &\leq \int \left| [B(\beta,\lambda) - B(\beta',\lambda)] \right| d\lambda \end{aligned}$$
(3.28)

Analog ergibt sich für eine andere Kombination der Winkel:

$$\Delta E_{2} = \left| E(\alpha',\beta) + E(\alpha',\beta') \right| = \left| \int A(\alpha',\lambda) [B(\beta,\lambda) + B(\beta',\lambda)] d\lambda \right|$$

$$\leq \int \left| A(\alpha',\lambda) \right| \left| [B(\beta,\lambda) + B(\beta',\lambda)] \right| d\lambda$$

$$\leq \int \left| [B(\beta,\lambda) + B(\beta',\lambda)] \right| d\lambda \qquad (3.29)$$

Wird nun die Summe von den Ausdrücken (3.28) und (3.29) gebildet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} |\Delta E_1| + |\Delta E_2| &= \left| E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta') \right| + \left| E(\alpha', \beta) + E(\alpha', \beta') \right| \\ &\leq \int \left| \left[B(\beta, \lambda) - B(\beta', \lambda) \right] \right| d\lambda + \int \left| \left[B(\beta, \lambda) + B(\beta', \lambda) \right] \right| d\lambda \end{aligned}$$
(3.30)

$$(3.31)$$

Aus Gleichung (3.30) ist bekannt, dass alle $B(\beta, \lambda)$ kleiner oder höchstens 1 sind. Daher kann die Summe nach oben abschätzt werden mit:

$$\left| \left[B(\beta,\lambda) - B(\beta',\lambda) \right] \right| + \left| \left[B(\beta,\lambda) + B(\beta',\lambda) \right] \right| \le 2$$
(3.32)

Somit ergibt sich die Summe aus (2.27) zu:

$$\left| E(\alpha,\beta) - E(\alpha,\beta') \right| + \left| E(\alpha',\beta) + E(\alpha',\beta') \right| \le 2 \int \rho(\lambda) d\lambda$$
(3.33)

Da das Integral über alle λ laut Definition 1 ergibt kann nochmals abgeschätzt werden mit: [Bag04]

$$\left| E(\alpha,\beta) - E(\alpha,\beta') \right| + \left| E(\alpha',\beta) + E(\alpha',\beta') \right| \le 2$$
(3.34)

Wird nun die Dreiecksungleichung angewendet, kann der Parameter S wie folgt definiert werden: [Zei98]

$$S := E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta) + E(\alpha', \beta')$$
(3.35)

Die Variable S gibt Auskunft darüber, ob die Ergebnisse durch eine lokalerealistische Theorie beschrieben werden können. Ist dies der Fall, liegt der Wert für S zwischen $-2 \ge S \le 2$. Ist der Wert außerhalb dieses Bereiches, ist das Ergebnis nicht durch eine LRT erklärbar.

Nun stellt sich die Frage, wie ein Wert für S experimentell bestimmt werden kann. Nach der Definition von S werden die Werte von den Erwartungswerten der einzelnen Messungen benötigt. Photon 1 kann in der Messapparatur von A entweder reflektiert (-1) oder transmittiert (+1) werden. Bei einer Transmission wird es als α -polarisiert bezeichnet, bei der Reflexion mit α^{\perp} -polarisiert. Für das andere Photon und Messung B gilt entsprechendes. Es können also insgesamt vier verschiedene Ergebnisse erhalten werden:

- Photon 1 transmittiert, Photon 1 transmittiert
- Photon 1 reflektiert, Photon 2 reflektiert

- Photon 1 transmittiert, Photon 2 reflektiert
- Photon 1 reflektiert, Photon 2 transmittiert

Jedes dieser Ereignisse hat eine Wahrscheinlichkeit, die zum Beispiel für den Fall, dass beide Photonen transmittiert werden, mit $\mathbb{P}(\alpha, \beta)$ bezeichnet wird. Mit diesen Möglichkeiten können die Erwartungswerte für bestimmte Winkeleinstellungen berechnet werden. Wird beispielsweise der Zustand Ψ^- als Grundlage verwendet, ergeben sich Folgendes:

$$E(\alpha,\beta) = (+)(+)\mathbb{P}(\alpha,\beta) + (-)(+)\mathbb{P}(\alpha^{\perp},\beta) + (+)(-)\mathbb{P}(\alpha,\beta^{\perp}) + (-)(-)\mathbb{P}(\alpha^{\perp},\beta^{\perp})$$
$$= \mathbb{P}(\alpha,\beta) - \mathbb{P}(\alpha^{\perp},\beta) - \mathbb{P}(\alpha,\beta^{\perp}) + \mathbb{P}(\alpha^{\perp},\beta^{\perp})$$
(3.36)

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten werden analog zu den Gleichungen (3.21-3.24) berechnet. Für den Erwartungswert ergibt sich somit:

$$E(\alpha, \beta) = \sin^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha - \beta)$$

= -\cos(2(\alpha - \beta)) (3.37)

Wird dies in Gleichung (3.35) eingesetzt, lässt sich der Parameter S bestimmen.

$$S = -\cos(2(\alpha - \beta)) + \cos(2(\alpha - \beta')) - \cos(2(\alpha' - \beta)) - \cos(2(\alpha' - \beta')))$$
(3.38)

Um die Bellsche-Unlgeichung maximal zu verletzen, werden Extremalwerte für den Parameter S benötigt. Um diese zu finden, wird folgendermaßen definiert:

$$x_1 = \alpha - \beta$$
 $x_2 = \beta - \alpha'$ $x_3 = \alpha' - \beta'$ $x_4 = \alpha - \beta'$ (3.39)

Es gilt zudem $x_1 + x_2 + x_3 = x_4$. Nun kann mit Hilfe der partiellen Ableitungen die Extremwerte bestimmt werden. Es ergeben sich folgende Bedingungen:

$$\sin(x_1) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$\sin(x_1) = \sin(x_2)$$
$$\sin(x_1) = \sin(x_3)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = \Theta \quad \text{und} \quad \sin(\Theta) = \sin(3\Theta)$$

mit Extrempunkten für $\Theta = \pm 22.5^\circ$ bzw. $\Theta = \pm 67.5^\circ$

Der Winkel Θ beschreibt dabei die Winkeldifferenz zwischen den beiden Polarisatoren bei A und B. Werden diese Werte in Gleichung (3.38) eingesetzt, erhält man einen maximalen oder minimalen Wert für S. Dieser beträgt für diese Winkeldifferenzen $S = \pm 2\sqrt{2}$. Es existieren mehrere Kombinationen der Winkeleinstellungen für α und β , um einen extremalen Wert für S zu bekommen. Eine mögliche Kombination wäre zum Beispiel

$$\alpha = 22.5^{\circ} \quad \alpha' = -22.5^{\circ} \quad \beta = 0^{\circ} \quad \beta' = -45^{\circ}$$
 (3.40)

In der Theorie lässt sich somit die Bellsche Ungleichung mit diesen Winkeleinstellungen verletzen.

4 Experimente

Die Theorie zeigt, dass die Quantenmechanik eine Möglichkeit liefert, die Bellsche-Ungleichung zu verletzen. Experimentell kann dies an verschränkten Photonenpaaren bestimmt werden. Da das dazugehörige Experiment, die Bell-Messung, zu komplex für Schulklassen ist, wird im zweiten Teil dieses Kapitels ein entwickelter Analogie-Versuch vorgestellt, der diese Messung in vereinfachter Form aufzeigt. Bei diesem Analogie-Experiment sollen klassische Objekte wie Lichtfarben eingesetzt werden.

4.1 Bell-Messung - verschränkte Photonen

Zunächst ist es wichtig, den Aufbau und die Durchführung des klassischen Versuchsaufbaus mit Photonen zu betrachten. Im Optikpraktikum der Universität Stuttgart befindet sich ein Aufbau zur Messung von verschränkten Photonenpaaren. In diesem Experiment können die verschiedenen Bell-Zustände eingestellt und somit eine maximale Verletzung der Bellschen-Ungleichung erreicht werden. Durch Messungen der Koinzidenzen kann ein experimenteller Wert für den Parameter S bestimmt werden.

4.1.1 Erzeugung verschränkter Photonenpaare

Die effektivste Methode um ein verschränktes Photonenpaar zu erzeugen, ist das Prinzip der spontanen parametrischen Fluoreszenz. Oft wird auch die englische Bezeichnung spontaneous parametric down-conversion, kurz SPDC, verwendet. Bei diesem Prozess wird ein starkes elektromagnetisches Feld E aus einer Quelle, wie beispielsweise einem Laser, ausgesendet. Dieses trifft auf einen nichtlinearen Kristall, wodurch eine Polarisation des Mediums entsteht. Bei optischen Erscheinungen im Alltag ist diese Polarisation linear abhängig von der einwirkenden Feldstärke, was bei der Brechung und Reflexion von Licht beobachtet werden kann. Je stärker die Feldstärke allerdings ist, desto zunehmender treten nichtlineare Faktoren auf. Weist dieser Kristall zudem kein Inversionszentrum auf, ist eine nichtlineare Polarisation die Folge. Diese induzierte Polarisation P kann annähernd durch eine Potenzreihe des E-Feldes entwickelt werden: [Mü09]

$$P = \epsilon_0(\chi^{(1)}E_1 + \chi^{(2)}E_1E_2 + \chi^{(3)}E_1E_2E_3 + \dots)$$
(4.1)

Die Faktoren $\chi^{(i)}$ bezeichnen dabei die nichtlineare dielektrische Suszeptibilität der Ordnung *n*. Der Parameter ϵ_0 ist die Dielektrizitätskonstante im Vakuum.

Im Falle einer SPDC spielen nur die Terme bis zur zweiten Ordnung eine Rolle, da die höheren Ordnungen vernachlässigbar klein sind. Trifft eine starke elektromagnetische Welle mit Frequenz ω_p auf einen nichtlinearen Kristall, entstehen aufgrund der nichtlinearen Terme zweiter Ordnung zwei neue Wellen mit Frequenzen ω_s und ω_i . Die Bezeichnungen stehen dabei für das *Pump-Feld* (*p*), das *Signal-Feld* (*s*) und das *Idler-Feld* (*i*). Bei Photonen entspricht dies einem Zerfall eines Photons in zwei Photone mit geringerer Energie. Besitzen beide emittierten Photonen die gleiche Wellenlänge ($\lambda_i = \lambda_s = 2 \cdot \lambda_p$), wird dies als entartete Fluoreszenz bezeichnet. [Obe02]



Abbildung 7: Entartete Fluoreszenz: Ein vertikales Photon der Wellenlänge $\lambda_p = 405nm$ wird durch eine SPDC in zwei horizontale Photonen der Wellenlänge $\lambda_i = \lambda_s = 810nm$ aufgeteilt. In diesem Beispiel wird der Typ-I beschrieben. [Qua]

Diese zwei emittierten Photonen besitzen starke korrelierte Eigenschaften, da sie simultan erzeugt werden. Das bedeutet, dass das Signal- und Idler-Photon zum einen eine zeitliche Korrelation besitzen, auf Grund der Energie- und Impulserhaltung zum anderen aber auch eine Frequenz- und Impulskorrelation. Daher sind die Emissionsrichtungen der beiden Photonen eingeschränkt. Für die SPCD gelten somit folgende Gleichungen: [Mü09]

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \tag{4.2}$$

$$\vec{k_p} = \vec{k_s} + \vec{k_i} \tag{4.3}$$

Diese werden auch als Phasenanpassungsbedingungen bezeichnet. Im Allgemeinen wird zwischen drei verschiedenen Arten der parametrischen Fluoreszenz unterschieden. Besitzen alle drei Photonen die gleiche Polarisation, spricht man vom **Typ-0**. Stehen das Idler- und Signal-Photon senkrecht zum Pump-Photon wird dies als **Typ-I** bezeichnet. Bei **Typ-II** stehen das Signal- und Idler-Photon senkrecht zueinander. Dabei wird zwischen einem außerordentlichen Fluoreszenzlicht (vertikale Polarisation) und einem ordentlichen Fluoreszenzlicht (horizontale Polarisation) differenziert. In den meisten Fällen wird der Typ-I und Typ-II verwendet. [Obe02]

Wie in Abbildung 8 zu erkennen ist, ergeben sich beim Typ-II zwei Emissions-



Abbildung 8: Typ-II: Durch die SPDC entstehen zwei Lichtkegel. Der untere Kegel ist das ordentliche Fluoreszenzlicht (horizontale Polarisation), der obere Kegel ist das außerordentliche Fluoreszenzlicht (vertikale Polarisation). Diese überschneiden sich in genau zwei Punkten, bei denen die beiden Photonen miteinander verschränkt sind. [Wik11]

kegel an der Austrittsfläche. Diese sind symmetrisch zur Pumpstrahlrichtung angeordnet. Der Öffnungswinkel hängt von der Wellenlänge des einfallenden Photons ab und kann durch Drehung des Kristalls verändert werden.

Mit Hilfe der Quantenmechanik kann das Wechselwirkungsbild zwischen der Kristallpolarisation und dem elektrischen Feld $\vec{E_p}$ des Pump-Photons modelliert werden. Es werden dabei nur die Terme bis zur zweiten Ordnung der Polarisation aus (4.1) betrachtet. Die nichtlineare Polarisation des Kristalls P^{NL} und das wirkende E-Feld müssen folgende Wellengleichung erfüllen: [Mü09]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 P^{NL}}{\partial t^2} \right) \tag{4.4}$$

Dabei wurde eine kollineare Ausbreitung der Welle in z-Richtung angenommen. Diese kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$E_i = A_i(z) \exp i(\omega_i t - k_i z) \tag{4.5}$$

Hierbei stellen ω_i die Frequenz, k_i die Ausbreitungsrichtung und $A_i(z)$ die Amplitude dar. Um das Wechselwirkungsbild zu bestimmen, wird der Hamiltonoperator benötigt:

$$\hat{H}_{int} = \epsilon_0 \int_V d^3 r \vec{P}_{NL} \vec{E}^p \tag{4.6}$$

$$= \epsilon_0 \int_V d^3 r \chi_{ijk}^{(2)} \hat{E}_i \hat{E}_j \hat{E}_k$$
 (4.7)

Die Indizes i, j, k bezeichnen die verschiedenen Felder, die an der Wechselwirkung beteiligt sind. Werden nur die relevanten Terme dieser Hamiltonfukntion betrachtet, vereinfacht sich (4.7) zu: [Obe02]

$$\hat{H}_{spdc} = \epsilon_0 \int_V d^3 r \chi_{eii}^{(2)} \hat{E}_{p,a}^{(+)} \hat{E}_{s,k}^{(-)} \hat{E}_{i,k}^{(-)}$$
(4.8)

Hierbei unterscheidet k = o, a die zwei möglichen Polarisationsrichtungen, ordentlich und außerordentlich. p, s und k stehen für Pump-, Signal- und Idler-Photon. Es kann also auch in dieser Funktion zwischen Typ-I $(\hat{E}_{s,o}^{(-)} \hat{E}_{i,o}^{(-)})$ und Typ-II $(\hat{E}_{s,o}^{(-)} \hat{E}_{i,a}^{(-)})$ unterschieden werden. Das Pump-Feld kann annähernd durch eine monochromatische Welle der Form $E_{p,a}e^{i(k_pz-\omega_pt)}$ beschrieben werden, da von einer stabilen Quelle ausgegangen wird. Für die Felder des Idler und Signal Photons werden zusätzlich sogenannte Erzeugungsoperatoren $\hat{a}_{\vec{k}x,k}^{\dagger}$ benötigt. Wird diese Information in (4.8) eingesetzt, kann damit der Zustand des Gesamtsystems bestimmt werden. Dieser ist wie folgt definiert: [Obe02]

$$|\psi\rangle = |0\rangle - \frac{i}{h} \int_{inf}^{t} dt \hat{H}_{int} |0\rangle$$
(4.9)

Daraus ergibt sich in diesem Fall für den Typ-II nach längerer Rechnung: [Obe02]

$$|\psi\rangle = C \int d^{3}\vec{k}_{a} \int d^{3}\vec{k}_{0}\delta(\omega_{p} - \omega_{0} - \omega_{a})\delta(\vec{k}_{p} - \vec{k}_{0} - \vec{k}_{a})\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_{0}}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_{a}}$$
(4.10)

Dieser Zustand kann folglich nur durch eine Emission von zwei Photonen entstehen, die eine sehr starke Korrelation bezüglich Energie, Impuls und Polarisation besitzen. Kann also ein Photon detektiert werden, ist sicher, dass ein zweites existiert.

Die verwendeten Kristalle können zum Teil optische Anisotropien besitzen, was zu einer Doppelbrechung führen kann. Dies kann zwei verschiedene Folgen haben. Zum einen kann ein transversaler Walk-Off auftreten, bei dem der Strahlengang des außerordentlichen Zweiges relativ zum ordentlich polarisierten Zweig abgelenkt wird. Zum anderen kann ein longitudinaler Walk-Off auftreten, der auf Grund unterschiedlicher Gruppengeschwindigkeiten der Wellenpakete durch den Kristall entsteht. Diese negativen Aspekte haben vor allem einen Einfluss auf den Grad der Verschränkung und sollten daher größtenteils kompensiert werden. Durch geeignete Verwendung zusätzlicher optischer Bauteile kann dies erreicht werden. [Obe02]

4.1.2 Versuchsaufbau

Für die Bell-Messung an verschränkten Photonen werden insgesamt drei verschiedene Abschnitte in dem Versuchsaufbau benötigt: [Fim15]

1. Eine Quelle zur Erzeugung verschränkter Photonenpaare (Pumping):

In diesem Versuchsaufbau besteht sie aus einer Laserdiode (405nm), einer $\frac{\lambda}{2}$ -Platte, einem Strahlteilerwürfel und einem nichtlinearen BBO-Kristall.

- 2. Zwei getrennte Messaparaturen A und B (Detection): Hauptkomponenten sind hier ein Polarisationsdreher mit Winkel λ bzw. β , eine SMF (single mode fibre) und ein SPCM (single photon counting module).
- 3. Einen Computer und Software zur Auswertung

4.1.3 Durchführung und Messung

Ein Laser mit einer Wellenlänge von 405nm wird auf einen nichtlinearen Kristall (BBO) fokussiert. Durch eine spontane parametrische Fluoreszenz entstehen zwei verschränkte Photonen, die getrennt in die Mode 1 und Mode 2 geschickt werden. Nachdem sie jeweils einen Polarisator mit Winkel α bzw. β durchlaufen haben, werden sie in das SMF eingekoppelt und zum SPCM geleitet. Per Software können schließlich die Koinzidenzen gemessen und ausgewertet werden. [Fim15]

Ziel der Messung ist es, mit Hilfe der Korrelationsfunktionen für verschränkte Photonen die Bellsche-Ungleichung zu widerlegen. Dazu muss folglich der in Kapitel 3 definierte Parameter S experimentell bestimmt werden. Da die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ausgänge der Messungen nicht direkt gemessen werden können, werden Koinzidenzen zwischen beiden detektierten Photonen benötigt. Gemessen wird die Anzahl an Koinzidenzen, die zeitgleich an beiden



Abbildung 9: Versuchsaufbau Bell-Messung [Fim15]

Messapparaturen detektiert werden. Durch viele Messwerte ergibt sich somit die relative Anzahl an Koinzidenzen bei gewissen Winkeleinstellungen. Diese werden als $C(\alpha, \beta)$ bezeichnet. Mit Hilfe von diesen Koinzidenzen können schließlich die Wahrscheinlichkeiten \mathbb{P} wie folgt bestimmt werden: [Fim15]

$$\mathbb{P}(\alpha,\beta) = \frac{C(\alpha,\beta)}{C(\alpha,\beta) + C(\alpha^{\perp},\beta) + C(\alpha,\beta^{\perp}) + C(\alpha^{\perp},\beta^{\perp})}$$
(4.11)

Daraus ergibt sich für den Erwartungswert:

$$E(\alpha,\beta) = \frac{C(\alpha,\beta) - C(\alpha^{\perp},\beta) - C(\alpha,\beta^{\perp}) + C(\alpha^{\perp},\beta^{\perp})}{C(\alpha,\beta) + C(\alpha^{\perp},\beta) + C(\alpha,\beta^{\perp}) + C(\alpha^{\perp},\beta^{\perp})}$$
(4.12)

Das bedeutet, dass insgesamt 16 verschiedene Messungen durchzuführen sind, um den Wert für S bestimmen zu können.

Ein Messdurchgang wurde während dieser Arbeit durchgeführt. Dabei konnten folgende Messwerte bestimmt werden:

$C(\alpha, \beta)$	$\beta = 0^{\circ}$	$\bar{\beta} = 90^{\circ}$	$\beta' = 45^{\circ}$	$\bar{\beta}' = 45^{\circ}$
$\alpha = 22, 5^{\circ}$	288	745	980	195
$\bar{\alpha} = 112, 5^{\circ}$	858	181	217	851
$\alpha' = -22, 5^{\circ}$	205	670	218	786
$\bar{\alpha}' = 67, 5^{\circ}$	959	243	990	209

Tabelle 1: Messwerte der Bell-Messung

28

Aus diesen Messwerten lassen sich die Erwartungswerte mit Formel (4.12) berechnen:

$$E(\alpha, \beta) = -0,55$$
 $E(\alpha, \beta') = 0,63$ $E(\alpha', \beta) = -0,57$ $E(\alpha', \beta') = -0,612$

Werden diese Ergebnisse in Gleichung (3.35) eingesetzt, ergibt sich ein Wert für den Parameter S von:

$$S = E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta) + E(\alpha', \beta')$$

= -0, 55 - 0, 63 - 0, 57 - 0, 612
= 2, 362

Dieser Wert liegt offensichtlich außerhalb des Bereiches einer lokal-realistischen Theorie. Die Bellsche-Ungleichung konnte somit in dieser Messung widerlegt werden.
4.2 Bell-Messung - verschränkte Farben

Auf Grund der Komplexität der klassischen Bell-Messung, die im vorherigen Abschnitt beschrieben wurde, wäre es von Vorteil, eine Analogie oder ein Experiment zu haben, das mit klassischen und alltagsüblichen Mitteln das Prinzip der Verschränkung und Nichtlokalität anschaulich und einfach erklärt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Experiment für diesen Zweck entwickelt.

Im folgenden Abschnitt wird eine Möglichkeit beschrieben, wie man ein Experiment und eine Messung durchführen kann, um diese Themen möglichst genau zu beschreiben, sodass Schüler und Lehrer eine Vorstellung davon bekommen können. Es werden dabei als Analogie zu verschränkten Photonenpaaren zwei Farbteilchen, welche die Farbe rot oder grün besitzen, verwendet. An den Farbteilchen kann eine Messung, ähnlich der klassischen Bell-Messung, durchgeführt werden, bei der eine Korrelation zwischen beiden emittierten Farbteilchen gemessen werden kann. Diese klassische Korrelation zeigt die Grenzen einer lokalen Theorie auf. Ein anschließender Vergleich mit nicht-lokalen Werten von verschränkten Photonen gibt einen Ausblick, was mit Quantenobjekten zusätzlich erreicht werden kann.

4.2.1 Aufbau

Der Versuchsaufbau kann wie bei dem Photonenmodell ebenfalls in drei Bereiche untergliedert werden. Diese werden im Folgenden näher erläutert.



Abbildung 10: Versuchsaufbau Farbenmodell [Dem16]

1. Eine Quelle zur Erzeugung der Lichtteilchenpaare:

In diesem Versuchsaufbau wird als Lichtquelle eine rote und grüne LED verwendet, die in entgegengesetzte Richtungen Licht in diesen zwei Farben aussendet. Das emittierte Licht wird auf jeder Seite mit Hilfe von plankonvexen Linsen auf einen Abschnitt des Quellrades fokussiert. Dieses besteht aus vier gleich großen Segmenten. Auf jedem Segment ist eine Farbfilterfolie angebracht, die nur das Licht der selben Farbe durchlässt. Es gibt jeweils zwei rote und zwei grüne Bereiche. Das Quellrad ist so angefertigt, dass das Licht nur einen Ausschnitt von 90° passieren kann. Somit kann je nach Position des Rades Licht mit grünem und/oder rotem Anteil hindurch kommen.

Das Quellrad setzt sich aus mehreren Teilen zusammen. Abbildung 11 zeigt das Grundgerüst des Quellrades. Das Bauteil "Kugellager Bottom" wurde so angefertigt, dass ein Rillenkugellager (Typ 6017, Abmessungen 85x130x22mm) hineingepresst werden kann. Die Aussparung auf der Innenseite dient der Beweglichkeit des Kugellagers, sodass bei einer Drehung möglichst keine Reibung auftritt. Durch die Öffnung an der Rückwand gelangt ein Ausschnitt des Lichtes in das Kugellager. Um das Kugellager zu einem späteren



Abbildung 11: Kugellager Bottom [Dem16]



Abbildung 12: Kugellager Deckel [Dem16]

Zeitpunkt wieder herausnehmen zu können, wurde dieses nicht eingeklebt, sonder mit Hilfe eines Deckels hineingepresst. Dieser wird durch Schrauben an das Kugellager Bottom befestigt. Dieses ist in Abbildung 12 zu sehen. In das Kugellager wurde anschließend das Filterrohr des Quellrades geklebt. Auf diesem werden die vier Farbfilterabschnitte befestigt. Dazu wurde ein schmaler Innenring ausgespart, auf welchem die Farbfilter aufgeklebt werden können. Die Klebestellen sollten lediglich am Rand sein, da Kleber in der Mitte des Filters eine Veränderung des Lichtes zur Folge haben kann. Um diese dennoch gut zu befestigen und zu stabilisieren, kann anschließend



Abbildung 13: Filterrohr [Dem16]

eine Plexiglasfolie darüber angebracht werden. Das Filterrohr hat eine größere Länge als das Kugellager, sodass dieses zum Teil nach außen übersteht. An diesem Teil kann ein Motor mittels Gummibänder oder Zahnriemen befestigt werden, wodurch das Quellrad elektrisch betrieben werden kann. Diese vier Bauteile bilden zusammengesetzt das Quellrad und können durch Drehung beliebige Farbanteile transmittieren. Von diesem Quellrad wurden zwei Exemplare von der mechanischen Werkstatt der Universität Stuttgart angefertigt. Die Kugellager wurden bei der Firma "Kugellager-Express" bestellt.



Abbildung 14: Quellrad (Vorderansicht) [Dem16]



Abbildung 15: Quellrad (Hinteransicht) [Dem16]

2. Zwei getrennte Messapparaturen A und B (Detection):

Das Licht, welches durch die Quellräder ausgesendet wird, kann nun in diesem Abschnitt des Versuchsaufbaus gemessen werden. Anstatt Polarisationsdrehern und Strahlteilerwürfeln gibt es bei diesem Farbenmodell Farbfilter und Farbspiegel. Die Farbfilter wurden ähnlich konstruiert wie das

Quellrad. Sie werden aus zwei verschiedenen Komponenten zusammengesetzt, dem "inner" und "outer part". Das Außengerüst wurde so konstru-



Abbildung 16: Filterrad (outer part) [Dem16]



Abbildung 17: Filterrad (inner part) [Dem16]

iert, dass der Innenteil in diesem eingesetzt wird und drehbar ist. Genau wie das Filterrohr des Quellrades besitzt auch dieser Innenteil eine Befestigungsmöglichkeit für die Farbfilterfolien. Damit der inner part nicht herausrutscht, wurde in dem Außenring eine Vertiefung ausgespart. In dieser können Schrauben eingeführt werden, die an dem äußeren Teil angeschraubt werden. Um das Filterrad drehen zu können, kann an dem inneren Teil ein Hebel angeschraubt werden. Dazu wurde eine Bohrung (M6x1 - 6H) angebracht. Abbildung 17 zeigt das zusammengesetzte Filterrad. Von diesem wurden zwei Exemplare durch die mechanische Werkstatt der Universität Stuttgart angefertigt.



Abbildung 18: Filterrad [Dem16]

Den zweiten Teil dieses Messabschnittes bildet die Detektion. Nach dem

Passieren des Filterrades wird das Licht wieder durch eine plan-konvexe Linse fokussiert. Anschließend können zwei verschiedene Messszenarien unterschieden werden. Zum einen kann nun direkt durch eine Photodiode die Intensität des Lichtes gemessen werden. Zum anderen kann das Licht zunächst in die einzelnen Farbanteile aufgetrennt werden. Dies wird mit einem "Hot-Cold-Mirror" erreicht, welcher bestimmte Wellenlängen transmittiert oder reflektiert. In diesem Fall ist dieser auf die Wellenlänge der LEDs abgestimmt, was bedeutet, dass der rote Lichtanteil reflektiert, der grüne jedoch transmittiert wird. Anschließend kann die Intensität der beiden Farbanteile einzeln gemessen werden.

Die Bauteile für die Detektion wurden bei der Firma Thorlabs bestellt. Als Spiegel wird das Modell FM02 (45 Deg Red Reflector, 1" Diameter) verwendet. Die Fotodioden DET100A/M (High Speed Si Detector, 350-1100nm) werden als Detektoren benutzt.

3. Einen Computer und Software zur Auswertung:

Die Photodioden werden mit einem Computer verbunden, wo eine Auswertung der Messung stattfinden kann. Es werden die Intensitäten des Lichtes beziehungsweise der Farbanteile gemessen. Diese können für weitere Rechnungen, wie der Bestimmung einer Korrelationsfunktion, verwendet werden.

4.2.2 Durchführung und Messung

In der Quelle wird Licht erzeugt, das einen Anteil an rotem und grünem Licht besitzt. Dieser Anteil hängt von der Stellung des Quellrades ab. Anschließend wird dieses Licht durch die Farbfilter nochmals verändert. Die Intensitäten des übrigen roten und grünen Lichtes werden von den Photodioden gemessen. Das Ziel ist es, eine Korrelation zwischen den beiden Messapparaturen festzustellen. Dazu werden für verschiedene Winkeleinstellungen α und β der beiden Farbfilter Messwerte bestimmt. Wie die Messwerte bei diesem Farbenmodell in Beziehung zueinander gesetzt werden, wird in Abschnitt 5 beschrieben.

Da nur ein Teil der Bauteile in der Bearbeitungszeit dieser Arbeit fertiggestellt wurden, liegen zum jetzigen Zeitpunkt noch keine Messdaten vor.

Im Anhang dieser Arbeit sind die Konstruktionszeichnungen der erstellten Bauteile angehängt.

5 Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten

In diesem Kapitel werden die Korrelationsfunktionen für Photonen und das Farbenmodell aus Abschnitt 4 hergeleitet. Dabei wird zunächst jeweils auf die klassischen und anschließend auf die verschränkten Objekte eingegangen. Abschließend wird ein Vergleich gezogen und somit der Unterschied zwischen einer klassischen und verschränkten Korrelation deutlich gemacht. Die Korrelationsfunktion setzt sich dabei jeweils aus den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Messergebnisse zusammen. Sie hat allgemein folgende Form:

$$E(\alpha,\beta) = \mathbb{P}_{++}(\alpha,\beta) + \mathbb{P}_{--}(\alpha,\beta) - \mathbb{P}_{+-}(\alpha,\beta) - \mathbb{P}_{-+}(\alpha,\beta)$$
(5.1)

Mit Hilfe der Korrelationsfunktionen und der Bellschen-Ungleichung lassen sich Aussagen darüber treffen, ob die vorliegende Theorie von lokaler Natur ist.

5.1 Photonen

Zunächst wird das EPR Gedankenexperiment, das in Abschnitt (3.2.4) erläutert wurde, betrachtet. In diesem werden aus einer Quelle gleichzeitig zwei Photonen in entgegengesetzte Richtungen ausgesendet, welche entweder unabhängig voneinander oder als verschränktes Photonenpaar in der Quelle erzeugt werden können. Anschließend wird an jedem Photon des Paares eine Bell-Messung durchgeführt. Dadurch lässt sich für beide Fälle eine Korrelationsfunktion bestimmen.

5.1.1 Klassische Korrelationsfunktion

Photonenpaare, die nicht miteinander verschränkt sind, weisen eine gewisse Korrelation bei der Bell-Messung auf. Diese soll im Folgenden bestimmt werden.

Wie bereits in Abschnitt (3.2.4) gezeigt wurde, wird jedes Photon durch eine Polarisation in Richtung des Winkels λ_1 bzw. λ_2 charakterisiert. Diese Polarisationsrichtungen werden zufällig festgelegt. Um jedoch eine starke Korrelation zu erzeugen, wird davon ausgegangen, dass beide Photonen jeweils die gleiche Polarisationsrichtung λ aufweisen. Der Winkel λ bezeichnet dabei die Drehung von der horizontalen Achse aus. Da dieser beliebig ist, bestimmt sich die Wahrscheinlichkeit, einen gewissen Winkel bei beiden Photonen vorzufinden, zu $\mathbb{P}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$. Die Messergebnisse beider Photonen werden weiterhin mit $A(\alpha, \lambda)$ und $B(\beta, \lambda)$ bezeichnet. Diese können entweder den Wert +1 oder -1 annehmen. Nach Gleichung (3.26) bestimmt sich somit die Korrelationsfunktion zu: [Asp02]

$$E(\alpha,\beta) = \int A(\alpha,\lambda)B(\beta,\lambda)\mathbb{P}(\lambda)d\lambda$$
(5.2)

Um diese Funktion berechnen zu können, werden konkrete Funktionen für die Messergebnisse $A(\alpha, \lambda)$ und $B(\beta, \lambda)$ benötigt. Diese hängen lediglich von den Winkeldifferenzen zwischen α , β und λ ab. Beispielsweise soll für das Messergebnis $A(\alpha, \lambda)$ der Wert +1 festgelegt werden, wenn die Winkeldifferenz zwischen λ und α kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist, anderenfalls der Wert -1. Um dies zu erreichen, wird die Vorzeichenfunktion sgn(x) verwendet. Damit können für beide Messergebnisse folgende Funktionen aufgestellt werden: [Asp02]

$$A(\alpha, \lambda) = sgn\{\cos^2(\alpha - \lambda) - \sin^2(\alpha - \lambda)\}$$
$$= sgn\{\cos(2(\alpha - \lambda))\}$$
(5.3)

$$B(\beta, \lambda) = sgn\{\cos^2(\beta - \lambda) - \sin^2(\beta - \lambda)\}$$

= $sgn\{\cos(2(\beta - \lambda))\}$ (5.4)

Der $\sin^2(x)$ und $\cos^2(x)$ Anteil dieser Funktionen ergibt sich aus den Wahrscheinlichkeiten beim Durchlaufen des Strahlteilerwürfels entweder transmittiert oder reflektiert zu werden, nachdem zuvor in einem Winkel α oder β durch den Polarisationsdreher gemessen wurde.

Nun können diese Funktionen der Messergebnisse A und B in Gleichung (5.2) eingesetzt und somit eine klassische Korrelationsfunktion für $\frac{-\pi}{2} \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$ bestimmt werden.

$$E(\alpha,\beta) = \int A(\alpha,\lambda)B(\beta,\lambda)\mathbb{P}(\lambda)d\lambda$$

=
$$\int_{-\pi}^{\pi} sgn\{\cos(2(\alpha-\lambda))\} \cdot sgn\{\cos(2(\beta-\lambda))\} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\lambda \qquad (5.5)$$

Um dieses Integral berechnen zu können, werden zunächst die beiden einzelnen sgn-Funktionen betrachtet. Der einfachste Fall liegt für die Winkeleinstellungen $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ vor, welcher in Abbildung 19 zu sehen ist. Da für alle Winkeldifferenzen $\alpha - \beta = 0$ beide sgn-Funktionen identisch sind, ergibt das Produkt dieser beiden stets den Wert 1. Wird anschließend die Integralrechnung (5.5) ausgeführt, lässt sich für diese Einstellungen der Wert 1 für



Abbildung 19: sgn-Funktion für α , $\beta = 0$ [Dem16]

E bestimmen. Es stellt sich heraus, dass sich für gleiche Winkeldifferenzen immer derselbe Wert für $E(\alpha, \beta)$ ergibt. Die Rechnung vereinfacht sich also indem O.b.d.A. für den Winkel β ein Wert von 0 angenommen wird. Wird der Winkel α variiert, verschiebt sich die sgn-Funktion um diesen Wert nach links oder rechts. Somit ändern sich die Sprungstellen der Produktfunktion, was eine Änderung des Wertes dieser Funktion zur Folge hat. Analog zur obigen Winkeldifferenz können auch in diesen Fällen die Werte des Produktes bestimmt und somit das Integral ausgerechnet werden. Wird dies für alle möglichen Winkeleinstellungen von α durchgeführt, ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$E(\alpha,\beta) = \int_{-\pi}^{\pi} sgn\{\cos(2(\alpha-\lambda))\} \cdot sgn\{\cos(2(\beta-\lambda))\} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\lambda$$
$$= 1 - \frac{4|\alpha-\beta|}{\pi}$$
(5.6)

Die Korrelation zwischen den beiden Photonen und den Messergebnissen hängt demnach nur von der Winkeldifferenz der beiden gemessenen Winkel α und β ab. Diese Differenz wird mit dem Winkel Θ bezeichnet. Dadurch lässt sich die klassische Korrelationsfunktion für Photonen schreiben als: [Asp02]

$$E(\Theta) = 1 - rac{4}{\pi} \cdot |\Theta|$$



Abbildung 20: Klassische Korrelationsfunktion - Photonen [Dem16]

In Abbildung 20 wird der Verlauf dieser Funktion in Abhängigkeit von der Winkeldifferenz Θ dargestellt. Es zeigt sich eine maximale Korrelation bei einer Winkeldifferenz von 0°, sowie keine Korrelation bei dem Wert $\Theta = \pm 45^{\circ}$.

5.1.2 Verschränkte Korrelationsfunktion

Verschränkte Photonenzustände sind nach Kapitel 3 diejenigen, welche nicht als Tensorprodukt von Hilberträumen dargestellt werden können. Auch werden nur die Zustände betrachtet, die eine maximale Verschränkung aufweisen. Diese sind die vier Bell-Zustände (3.9) bis (3.12). Als Beispiel wird der Zustand

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle) \tag{5.7}$$

verwendet. Da hier nur ein konkreter Zustand festliegt, muss im Gegensatz zum klassischen Fall, nur für diesen einen das Messergebnis bestimmt werden. Für die Korrelationsfunktion werden die Wahrscheinlichkeiten \mathbb{P} benötigt, die für die einzelnen Messergebnisse stehen. Diese können analog zu Gleichung (3.20) bestimmt werden. Für den Bell-Zustand (5.7) ergibt sich beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass beide Photonen transmittiert werden zu:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{++}(\alpha,\beta) &= |\langle\beta|_2 \langle\alpha|_1 |\Phi^+\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} [\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] + \frac{1}{2} [\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cos^2(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann auch auf andere Weise hergeleitet werden. Der verschränkte Zustand (5.7) hat zur Folge, dass beide Photonen zu jeder Zeit dieselbe Polarisation einnehmen. Wird Photon 1 durch eine Messung mit dem Polarisationsdreher α in diese Richtung projiziert, nimmt Photon 2 instantan dieselbe Polarisationsrichtung ein. Das Messergebnis (++) kann somit wie folgt betrachtet werden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Photon 1 nach der Messung in Richtung α polarisiert ist, beträgt $\frac{1}{2}$. Wird nun augenblicklich Photon 2 in diese Polarisationsrichtung projiziert, muss die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass dieses nach durchlaufen des Polarisationsdreher bei Messung B in Richtung β polarisiert ist. Dazu kann Abbildung 5 betrachtet werden, die eine Drehung um den Winkel α beschreibt. Nach dieser Drehung lassen sich die Zustände $|H\rangle$ und $|V\rangle$ schreiben als:

$$|H\rangle = \cos(\alpha) |\alpha\rangle - \sin(\alpha) |\alpha^{\perp}\rangle \tag{5.8}$$

$$|V\rangle = \cos(\alpha) |\alpha\rangle + \sin(\alpha) |\alpha^{\perp}\rangle$$
(5.9)

Wird nun der neue Zustand $|\alpha\rangle$ bzw. $|\alpha^{\perp}\rangle$ nochmals durch einen Polarisationsdreher um den Winkel β gedreht, lassen sich auch diese Zustände beschreiben durch:

$$|\alpha\rangle = \cos(\alpha - \beta) |\beta\rangle - \sin(\alpha - \beta) |\beta^{\perp}\rangle$$
(5.10)

$$|\alpha^{\perp}\rangle = -\sin(\alpha - \beta) |\beta\rangle + \cos(\alpha - \beta) |\beta^{\perp}\rangle$$
(5.11)

Ein Photon, das mit der Polarisation in Richtung α die Messung bei B durchläuft, befindet sich danach folglich mit einer Wahrscheinlichkeit von $\cos^2(\alpha - \beta)$ in Richtung β polarisiert. Somit kann das Ergebnis (++) mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\cos^2(\alpha - \beta)$ bestimmt werden. Das Resultat aus der quantenmechanischen Rechnung bestätigt sich auch durch diese Überlegung. Analog lassen sich die Wahrscheinlichkeiten der anderen Messergebnisse berechnen. Es ergibt sich:

$$\mathbb{P}_{--}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta) \quad \mathbb{P}_{+-}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta) \quad \mathbb{P}_{-+}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\sin^2(\alpha,\beta)$$

Daraus lässt sich sofort die Korrelationsfunktion ableiten. Mit Gleichung (5.1) und den obigen Wahrscheinlichkeiten bestimmt sich diese zu:

$$E(\alpha,\beta) = \mathbb{P}_{++}(\alpha,\beta) + \mathbb{P}_{--}(\alpha,\beta) - \mathbb{P}_{+-}(\alpha,\beta) - \mathbb{P}_{-+}(\alpha,\beta)$$
$$= \frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$= \cos^2(\alpha-\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$$

Auch im Fall von verschränkten Photonen hängt die Korrelationsfunktion nur von der Winkeldifferenz Θ der beiden Polarisationsdreher ab. Dadurch lässt sich diese Funktion vereinfachen zu:

$$E(\Theta)=\cos^2(\Theta)-\sin^2(\Theta)$$

Der Verlauf dieser Korrelationsfunktion ist in Abbildung 21 zu sehen.



Abbildung 21: Verschränkte Korrelationsfunktion - Photonen [Dem16]

5.2 Farbenmodell

Nun wird das in Abschnitt 4.2 vorgestellte Farbenmodell betrachtet. In einer Quelle werden zwei Farbteilchen in entgegengesetzte Richtung ausgesendet. Die Farbe dieser beiden Teilchen hängt von der Stellung des Quellrades ab. Anschließend werden diese durch Farbfilter gesendet und die Lichtintensität dahinter wird gemessen. Dadurch lässt sich auch in diesem Beispiel eine Korrelationsfunktion bestimmen.

5.2.1 Klassische Korrelationsfunktion

Auch die nicht verschränkten Farbteilchen weisen eine gewisse Korrelation bei der Messung auf. Die Quelle erzeugt je nach Position des Rades ein bestimmtes Farbteilchen. Dabei werden alle Stellungen des Quellrades berücksichtigt, auch wenn sich diese nach Drehung um 180° wiederholen. Das linke Farbteilchen hat somit eine bestimmte Farbe λ_1 und das entgegengesetzte rechte Farbteilchen eine Farbe λ_2 . Um dies mit den Photonen vergleichen zu können und um eine maximale Korrelation zu erreichen, wird auch hier davon ausgegangen, dass beide ausgesendeten Farbteilchen identisch sind. λ bezeichnet in diesem Fall den Winkel einer Drehung, ausgehend von der roten Achse. Da dieser beliebig sein kann, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Farbteilchen aus der Quelle zu erhalten zu $\mathbb{P}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$.

Die Messergebnisse werden auch hier in einen Wert von ± 1 unterteilt. Falls die gemessene Lichtintensität hinter dem Filterrad größer als $\frac{1}{2}I_{max}$ ist, wird das Ergebnis +1 notiert, anderenfalls -1. So lässt sich auch in diesem Beispiel eine Korrelationsfunktion durch

$$E(\alpha,\beta) = \int A(\alpha,\lambda)B(\beta,\lambda)\mathbb{P}(\lambda)d\lambda$$
(5.12)

bestimmen. Im Vergleich zu den Photonen werden hier für die einzelnen Messergebnisse $A(\alpha, \lambda)$ und $B(\beta, \lambda)$ andere Funktionen benötigt, da sich die Wahrscheinlichkeiten der Messungen in diesem Modell geändert haben.

Die Lichtintensität hinter einem Filterrad hängt von dessen Position und der Position des Quellrades ab. Sie steigt und fällt linear mit der Winkeldifferenz dieser beiden Einstellungen. Somit ergeben sich für die Messergebnisse folgende Verteilungen:

$$A(\alpha, \lambda) = sgn\{1 - \frac{4|\alpha - \lambda|}{\pi}\}$$
(5.13)

$$B(\beta,\lambda) = sgn\{1 - \frac{4|\beta - \lambda|}{\pi}\}$$
(5.14)

Mit diesen Funktionen kann die Korrelationsfunktion aus (5.8) bestimmt werden. Es ergibt sich:

$$E(\alpha,\beta) = \int_{-\pi}^{\pi} sgn\{1 - \frac{4|\alpha - \lambda|}{\pi}\} \cdot sgn\{1 - \frac{4|\beta - \lambda|}{\pi}\} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\lambda \qquad (5.15)$$

Die sgn-Funktionen dieser Berechnung unterscheiden sich nicht von den klassischen Photonen. Es spielt keine Rolle, ob die innere Funktion trigonometrischer oder linearer Natur ist, solange die Sprungstellen bzw. Nullstellen übereinstimmen. Daher ergibt sich auch in diesem klassischen Fall eine Korrelationsfunktion von:

$$E(\alpha,\beta) = 1 - \frac{4|\alpha - \beta|}{\pi}$$
(5.16)

Diese Funktion gilt für alle Werte $\frac{-\pi}{2} \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Somit hängt auch die Korrelation bei dem klassischen Fall des Farbenmodells lediglich von der Winkeldifferenz Θ der beiden Farbfilter ab. Das Schaubild dieser Korrelationsfunktion entspricht Abbildung 22.

$$E(\Theta) = 1 - rac{4}{\pi} \cdot |\Theta|$$



Abbildung 22: Klassische Korrelationsfunktion - Farbenmodell [Dem16]

Alternativ kann auch die Lichtintensität durch die verschiedenen Farbanteile ersetzt werden. Dies würde bedeuten, dass das Ergebnis +1 für das Detektieren eines roten Lichtteilchens steht und -1 das Detektieren eines grünen Lichtteilchens. Das Lichtteilchen wird dabei einer bestimmten Farbe zugeordnet, falls die Intensität dieser Farbe höher ist, als die Intensität der anderen. Für die Funktionen der Messergebnisse und die Korrelationsfunktion würde dies allerdings keine Änderung nach sich ziehen.

5.2.2 Verschränkte Korrelationsfunktion

Nun wird untersucht, ob es bei diesem Farbenmodell auch eine verschränkte Korrelationsfunktion geben kann. Dazu werden einzelne Farbteilchen betrachtet, deren Farbzustand in quantenmechanischer Schreibweise wie folgt notiert werden kann:

$$|1\rangle = a \cdot |R\rangle + b \cdot |G\rangle \tag{5.17}$$

$$|2\rangle = c \cdot |R\rangle + d \cdot |G\rangle \tag{5.18}$$

Die Zustände setzen sich somit aus einem Anteil von roter und grüner Farbe zusammen. Welchen Anteil jede Farbe vom gesamten Farbteilchen einnimmt, beschreiben die Faktoren a, b, c, und d. Für diese gilt:

$$a^2 + b^2 = 1$$
 und $c^2 + d^2 = 1$ (5.19)

Sie geben die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine bestimmte Farbe des Teilchens vorhanden ist. Dabei werden die Wahrscheinlichkeiten nicht mehr direkt angegeben, sondern wie in der Theorie für Photonen wird die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des Betragsquadrates der einzelnen Parameter bestimmt. So kann beispielsweise die Farbe Rot bei dem ersten Farbteilchen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(R) = |a|^2$ auftreten.

Die Farbteilchen können in einem zweidimensionalen Vektorraum dargestellt werden. Dies ist in diesem Fall der euklidische Raum \mathbb{R}^2 , in welchem die Grundzustände $|R\rangle$ und $|G\rangle$, ähnlich wie bei den Photonen die Polarisationsrichtung $|H\rangle$ und $|V\rangle$, die Basisvektoren darstellen:

$$|R\rangle = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix} \qquad |G\rangle = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix} \qquad (5.20)$$

Der Zustand eines Farbteilchens wird in Abbildung 23 dargestellt. Nun werden beide ausgesendeten Teilchen in einem Gesamtsystem betrachtet. In diesem



Abbildung 23: Vektordarstellung eines Farbzustandes: Hier ist der Zustand des Lichtteilchens 1 als Linearkombination durch $|1\rangle = 0.55 |R\rangle + 0.84 |G\rangle$ dargestellt. Man findet also eine Fläche von $|0.55|^2 \approx 30\%$ Rot und $|0.84|^2 \approx 70\%$ Grün vor. [Dem16]

sind ebenfalls verschiedene Zustände möglich. In der Quantenmechanik wird die Beschreibung des gesamten Zustandes eines Paares durch Bildung des Tensorproduktes der einzelnen Räume erstellt. Dieses Experiment mit zwei Farbteilchen erzeugt somit einen Hilbertraum der Dimension vier. Der allgemeine Zustand vereinfacht sich in diesem Fall zu:

$$|12\rangle = |1\rangle \cdot |2\rangle = (a |R\rangle_1 + b |G\rangle_1) \cdot (c |R\rangle_2 + d |G\rangle_2)$$

$$= ac \cdot |R\rangle_1 |R\rangle_2 + ad \cdot |R\rangle_1 |G\rangle_2 + bc \cdot |G\rangle_1 |R\rangle_2 + bd \cdot |G\rangle_1 |G\rangle_2$$

$$\coloneqq ac \cdot |RR\rangle + ad \cdot |RG\rangle + bc \cdot |GR\rangle + bd \cdot |GG\rangle$$
(5.21)

Auch für dieses Gesamtsystem gilt die Bedingung, dass alle Wahrscheinlichkeiten der möglichen Zustände in Summe 100 Prozent ergeben. Deshalb muss für die einzelnen Parameter gelten:

$$|ac|^{2} + |bd|^{2} + |ad|^{2} + |bc|^{2} = 1$$
(5.22)

Mit Gleichung (5.20) werden alle Zustände beschrieben, die klassisch denkbar sind. Es sind offensichtlich vier Grundzustände möglich, die einen Vektorraum der Dimension vier aufspannen. Diese sind:

$$|RR\rangle = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \qquad |RG\rangle = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \qquad |GR\rangle = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \qquad |GG\rangle = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$$

Es ist jedoch schwierig, sich einen vierdimensionalen Vektorraum bildlich vorzustellen. In diesem Fall ist der Vektorraum, welcher aus den Produkten der einzelnen Zustände gebildet wird, nur ein Teilraum des vierdimensionalen Hilbertraumes. Es gibt in ihm Vektoren bzw. Zustände, die nicht durch klassische Einzelzustände erstellt werden können. Dies kann bereits in Gleichung (5.20) verdeutlicht werden. Jeweils drei der Zustände sind durch die Vorfaktoren miteinander verknüpft. Deshalb gibt es keinen Zustand, der durch eine Linearkombination von drei Grundzuständen beschrieben werden kann. Tritt ein Grundzustand nicht auf, muss automatisch ein weiterer wegfallen. Die Zustände des Gesamtsystems können also lediglich aus einer Linearkombination von allen vier, zwei oder einem Grundzustand erstellt werde. Bei zwei Grundzuständen gibt es allerdings auch Einschränkungen. Wird jeweils ein Parameter 0 gesetzt, ergeben sich für die Kombination aus zwei Grundzuständen folgende minimale Möglichkeiten:

a = 0	\Rightarrow	$ 12\rangle = bd GG\rangle + bc GR\rangle$
b = 0	\Rightarrow	$ 12\rangle = ac RR\rangle + ad RG\rangle$
c = 0	\Rightarrow	$ 12\rangle = bd GG\rangle + ad RG\rangle$
d = 0	\Rightarrow	$ 12\rangle = ac RR\rangle + bc GR\rangle$

Es gibt somit keine Möglichkeit einen Gesamtzustand des Systems zu erstellen, der eine Linearkombination aus den Zuständen $|RR\rangle$ und $|GG\rangle$ ist sowie $|GR\rangle$ und $|RG\rangle$. Diese Kombinationen führen zu verschränkten Zuständen. Dies wird in Abbildung 24 dargestellt.



Abbildung 24: Mögliche Farbzustände [Dem16]

Um in diesem Farbenmodell schließlich doch eine von der klassischen Korrelationsfunktion abweichende Funktion zu erhalten, müssen verschiedene Annahmen beziehungsweise Veränderungen der Farbmessung durchgeführt werden. Es sind insgesamt drei Modifikationen, welche die Farbmessung von der klassischen Bell-Messung an Photonen unterscheidet. Diese sind folgende:

1) Eine Quelle zur Erzeugung verschränkter Farbteilchen

Für eine vom klassischen Fall abweichende Korrelationsfunktion wird eine Quelle benötigt, die eine Verschränkung der beiden Farbteilchen ermöglicht. Existiert eine Methode um eine Verschränkung zu erreichen, lassen sich auch für die zwei Farbteilchen die vier Bell-Zustände einstellen. Ein möglicher Zustand ist dann:

$$|12\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|RR\rangle + |GG\rangle \right) \tag{5.23}$$

Dieser hat zur Folge, dass beide Farbteilchen zu jeder Zeit die gleiche Farbe besitzen. Befindet sich das Teilchen 1 nach dem Passieren des Farbfilters mit Winkel α in einem neuen Zustand, nimmt das Farbteilchen 2 diesen Zustand augenblicklich ebenfalls an. Dieses Phänomen erfordert eine weitere Eigenschaft, die als Projektion bezeichnet wird.

2) Projektive Farben und Farbfilter

Ein wichtiger Unterschied zwischen den Farbteilchen und den Photonen liegt in der Messung an den Polarisationsdrehern. Die Drehung der Polarisationsrichtung eines Photons ist eine projizierende Abbildung. So kann beispielsweise eine Polarisationsrichtung, die nur einen horizontalen Anteil beinhaltet, nach einer Drehung um den Winkel $\alpha > 0$ einen vertikalen Anteil besitzen, obwohl dieser zuvor nicht existierte. Diese Projektion ist bei dem Farbenmodell nicht möglich. Aus beispielsweise rotem Licht kann nach Durchlaufen eines Farbfilters kein Licht mit einem grünen Anteil austreten. Das Farbenmodell beruht daher auf dem Prinzip der Absorption. Die Verschränkung und Projektion stehen somit in enger Beziehung zueinander. Phänomene der Verschränkung können folglich nicht ohne projizierende Messungen auftreten.

3) Nicht-lineare Farbfilter

Ein weiterer Unterschied zwischen dem Farben- und Photonenmodell, liegt zwischen den Farbfiltern und den Polarisationsdrehern. Die verwendeten Farbfilter haben eine lineare Abschwächung, wenn das Licht um den Winkel α gedreht wird. Dahingegen besitzen die Polarisationsdreher eine trigonometrische Veränderung. Es müssten also Farbfilter angefertigt werden, die ebenfalls diesem Muster folgen.

Im Folgenden soll überprüft werden, ob es durch diese drei Modifikationen eine verschränkte Korrelationsfunktion für das Farbenmodell geben kann. Die Grundannahme 1) von existierenden verschränkten Farbteilchen wird dabei stets vorausgesetzt. Zunächst wird untersucht, ob lediglich durch Hinzunahme der Modifikation 2) eine verschränkte Korrelationsfunktion erzeugt werden kann.

Die Annahme ist also, dass verschränkte Farbteilchen erzeugt und durch eine Messungen in neue Zustände projiziert werden können. Analog zu den verschränkten Photonen wird die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_{++}(\alpha,\beta)$ berechnet, beide Farbteilchen in Richtung α und β vorzufinden. Genau wie bei den Photonen beträgt die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen 1 nach der Messung bei A in einer bestimmten Farbeinstellung α zu finden, den Wert $\frac{1}{2}$. Auf Grund der Verschränkung wird die Farbe des Lichtteilchens 2 augenblicklich in die Einstellung α gesetzt. Nun durchläuft dieses noch den Farbfilter bei B, der um den Winkel β gedreht ist.

Die Zustände $|R\rangle$ und $|G\rangle$ lassen sich nach einer Drehung um den Winkel α wie folgt schreiben:

$$|R\rangle = \sqrt{\left(1 - \frac{2|\alpha|}{\pi}\right)} |\alpha\rangle - \sqrt{\frac{2|\alpha|}{\pi}} |\alpha^{\perp}\rangle \tag{5.24}$$

$$|G\rangle = \sqrt{\left(1 - \frac{2|\alpha|}{\pi}\right)|\alpha\rangle} + \sqrt{\frac{2|\alpha|}{\pi}}|\alpha^{\perp}\rangle \tag{5.25}$$

Wird nun der neue Farbzustand $|\alpha\rangle$ bzw. $|\alpha^{\perp}\rangle$ nochmals durch einen Farbfilter um den Winkel β gedreht, lassen sich auch diese Zustände folgendermaßen beschreiben:

$$|\alpha\rangle = \sqrt{\left(1 - \frac{2|\alpha - \beta|}{\pi}\right)} |\beta\rangle - \sqrt{\frac{2|\alpha - \beta|}{\pi}} |\beta^{\perp}\rangle$$
(5.26)

$$|\alpha^{\perp}\rangle = -\sqrt{\frac{2|\alpha-\beta|}{\pi}} |\beta\rangle + \sqrt{\left(1 - \frac{2|\alpha-\beta|}{\pi}\right)} |\beta^{\perp}\rangle \tag{5.27}$$

Ein Farbteilchen mit der Farbeinstellung α , das die Messung bei B durchläuft, befindet sich danach mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1-\frac{2|\alpha-\beta|}{\pi})$ im Zustand β . Somit kann das Ergebnis (++) mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}_{++}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(1-\frac{2|\alpha-\beta|}{\pi})$ bestimmt werden. Analog werden die anderen Messergebnisse bestimmt.

$$\mathbb{P}_{++}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(1-\frac{2|\alpha-\beta|}{\pi}) \qquad \mathbb{P}_{+-}(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\frac{2|\alpha-\beta|}{\pi}$$
$$\mathbb{P}_{--}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(1-\frac{2|\alpha-\beta|}{\pi}) \qquad \mathbb{P}_{-+}(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\frac{2|\alpha-\beta|}{\pi}$$

Daraus lässt sich mit Gleichung (5.1) die Korrelationsfunktion bestimmen:

$$\begin{split} E(\alpha,\beta) &= \mathbb{P}_{++}(\alpha,\beta) + \mathbb{P}_{--}(\alpha,\beta) - \mathbb{P}_{+-}(\alpha,\beta) - \mathbb{P}_{-+}(\alpha,\beta) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{2|\alpha - \beta|}{\pi}) + \frac{1}{2}(1 - \frac{2|\alpha - \beta|}{\pi}) + \frac{1}{2}(\frac{2|\alpha - \beta|}{\pi}) + \frac{1}{2}(\frac{2|\alpha - \beta|}{\pi}) \\ &= 1 - \frac{4|\alpha - \beta|}{\pi} \end{split}$$

Wird die Winkeldifferenz der beiden Farbfilter durch den Winkel Θ ersetzt, ergibt sich dieselbe Korrelationsfunktion, wie im klassischen Fall.

$$E(\Theta) = 1 - rac{4}{\pi} \cdot |\Theta|$$

Die Modifikationen 1) und 2) sind also nicht ausreichend, um für dieses Modell eine Korrelationsfunktion zu erzeugen, die vom klassischen Fall abweicht. Es muss also noch eine weitere Modifikation 3) vorgenommen werden.

In dieser können verschränkte Farbteilchen erzeugt werden, die nach einer trigonometrischen Projektion der Farbfilter untersucht werden. Durch Modifikation 3) ändern sich die Zustände nach einer Drehung um den Winkel α zu:

$$|R\rangle = \cos(\alpha) |\alpha\rangle - \sin(\alpha) |\alpha^{\perp}\rangle$$
(5.28)

$$|G\rangle = \sin(\alpha) |\alpha\rangle + \cos(\alpha) |\alpha^{\perp}\rangle$$
(5.29)

Ebenso ergeben sich dann für die Zustände nach der Messung B:

$$|\alpha\rangle = \cos(\alpha - \beta) |\beta\rangle - \sin(\alpha - \beta) |\beta^{\perp}\rangle$$
(5.30)

$$|\alpha^{\perp}\rangle = -\sin(\alpha - \beta) |\beta\rangle + \cos(\alpha - \beta) |\beta^{\perp}\rangle$$
(5.31)

Daraus lassen sich die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse bestimmen. Mit Gleichung (5.1) folgt auch für das verschränkte Farbenmodell die gleiche Korrelationsfunktion, wie für verschränkte Photonen.

$$E(\alpha,\beta) = \mathbb{P}_{++}(\alpha,\beta) + \mathbb{P}_{--}(\alpha,\beta) - \mathbb{P}_{+-}(\alpha,\beta) - \mathbb{P}_{-+}(\alpha,\beta)$$
$$= \frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$= \cos^2(\alpha-\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$$

Können die Bedingungen 1), 2) und 3) erfüllt werden, kann also eine verschränkte Korrelationsfunktion für das Farbenmodell bestimmt werden, die sich vom klassischen Fall unterscheidet. Auch im Fall von verschränkten Farben hängt die Korrelationsfunktion nur von der Winkeldifferenz Θ der beiden Farbfilter ab. Dadurch lässt sich auch diese Funktion vereinfachen zu:

$$E(\Theta)=\cos^2(\Theta)-\sin^2(\Theta)$$

Diese Korrelationsfunktion wird in Abbildung 25 dargestellt.



Abbildung 25: Verschränkte Korrelationsfunktion - Farbenmodell [Dem16]

5.3 Ergebnis und Vergleich der Korrelationen

Aus den beiden Gleichungen der Korrelationsfunktionen von klassischen und verschränkten Objekten lässt sich erkennen, dass beide lediglich von der Winkeldifferenz Θ der beiden Analysatoren α und β abhängen. Dennoch gibt es im Verlauf der Korrelationsfunktion Unterschiede. Da die klassische Funktion linearer, die verschränkte Funktion allerdings trigonometrischer Natur ist, ergeben sich für bestimmte Winkeleinstellungen Abweichungen. Mit verschränkten Objekten können somit für gewisse Winkel α und β stärkere bzw. schwächere Korrelationen auftreten, als die klassische Berechnung es zulässt. Genau diese Bereiche werden verwendet, um eine Verletzung der Bellschen-Ungleichung zu erreichen.



Abbildung 26: Vergleich der Korrelationsfunktionen [Dem16]

Es hat sich zudem gezeigt, dass sich bei dem Farbenmodell nur durch Hinzunahme von drei Modifikationen eine vom klassischen Fall abweichende Korrelationsfunktion ergibt. Durch Hinzufügen von lediglich einer oder zwei Änderungen kann dies nicht erreicht werden. So kann beispielsweise auch bei dem klassischen Modell keine Abweichung erzielt werden, wenn nur die linearen Farbfilter durch eine trigonometrische Absorption ersetzt werden.

6 Anwendungen

Das Prinzip der Verschränkung und Superposition findet mittlerweile bereits erste Anwendungen. Wissenschaftler wollen sich diese besonderen Eigenschaften von Quantenobjekten zu Nutze machen, um neue, möglicherweise bessere, Technologien zu erforschen. Eine davon stellt der Quantencomputer dar. Dieser nutzt vor allem die Überlagerung von Zuständen, um eine schnellere Rechenleistung zu ermöglichen.

Mit Hilfe der Verschränkung können Informationen "teleportiert" werden, was somit eine schnelle und sichere Alternative zu bisherigen Übermittlungsverfahren liefert. In diesem Abschnitt werden die Grundzüge des Quantencomputers und der Quantenteleportation dargestellt. Zudem wird ein Beispiel aufgezeigt, bei dem die Wahrscheinlichkeit der Quantenphysik verwendet werden kann, um scheinbar unlösbare Aufgaben zu bewältigen.

6.1 Quantencomputer

Eine Welt ohne Computer ist heutzutage kaum noch vorstellbar. Die Entwicklung dieser technischen Errungenschaft des 20. Jahrhunderts ist in vollem Gange. Doch der klassische Computer wird in naher Zukunft sein Limit erreichen. Dies liegt vor allem daran, dass Bauteile immer kleiner werden und schon bald in der Größenordnung einzelner Atome sein könnten. Allerdings gelten für Hardwarekomponenten in dieser Größenordnung die Gesetze der Quantenmechanik, welche bislang noch nicht berücksichtigt wurden. Wissenschaftler wollen nun diese Hürde mit einer neuen Technik überwinden. Die Idee ist die Kombination von Computern und der Quantenmechanik, welche einen neuen interdisziplinären Zweig mit der Bezeichnung "Quantum Computing" bildet. Mit dieser neuen Technik und den Eigenschaften der Quantenmechanik können Quantencomputer Aufgaben lösen, die bisher für klassiche Computer undenkbar sind. Die absolut abhörsichere Nachrichtenübertragung, Teleportation von Informationen oder das Erzeugen von echten Zufallszahlen sind nur ein paar wenige technische Möglichkeiten, die der Quantencomputer mit sich bringt. [Hom13]

Lange Zeit war nicht klar, ob Quantencomputer in der Realität funktionieren können und inwieweit diese Technik tatsächlich genutzt werden kann. Die Entwicklung einer solchen neuartigen Rechenmaschine ist aber in vollem Gange. Vor allem Google und die US-Raumfahrtbehörde sind mittendrin in der Forschung, sogar mit ersten Resultaten und funktionsfähigen Geräten. Allerdings



Abbildung 27: D-Wave-Quantencomputer [Sch15]

konnten bislang nur Ergebnisse unter Laborbedingungen erbracht werden. Dabei wurde im Inneren des sogenannten "D-Wave-Quantencomputer" vor allem auf Supraleitung gesetzt, welche eine Temperatur nahe dem absoluten Nullpunkt (0 Kelvin) voraussetzt. Zudem wird auf totale Dunkelheit, Stille und ein Vakuum gesetzt. Der Raum muss zusätzlich vor Magnetismus, Vibrationen oder anderen externen Einflüssen geschützt werden. Auf Grund dieser Bedingungen ist bisher an eine alltagstaugliche Maschine noch nicht zu denken. Der erste Schritt ist allerdings getan und kleinere Rechenaufgaben wurden bereits von der Maschine gelöst. Weitere Tests und Modelle werden sicherlich bald folgen. [Sch15]



Abbildung 28: Quantenchip D-Wave [Sch15]



Abbildung 29: Qubits [Sch15]

Google und die NASA setzen momentan auf Quantenchips der Firma "D-Wave", wollen aber in naher Zukunft bereits einen eigenen, noch besseren Quantencomputer bauen. D-Wave wurde 1999 gegründet und wird von Amazon-

Gründer Jeff Bezos sowie der CIA gefördert. [Sch15]

Um einen Quantenchip konstruieren zu können, werden folgende Dinge benötigt:

- ein Qubit
- die Möglichkeit, um die Qubits in einen definierten Anfangszustand zu versetzen
- die Möglichkeit, eine Messung an den Qubits vorzunehmen
- die Möglichkeit, Rechenoperationen an den Qubits durchzuführen
- die Dauer eines Rechenschrittes und dessen Vorbereitung muss kürzer sein, als die Zeit, in der die Qubits ihre Quanten-Eigenschaften verlieren

Diese Kriterien nennt man DiVincenzo-Kriterien, welche nach dem IBM-Forscher David DiVicenzo benannt sind. [Mat12] Um zu verstehen, wie diese Bedingungen erfüllt werden können, werden zunächst die Funktions- und Arbeitsweise eines Quantencomputers verdeutlicht. Allerdings werden in dieser Arbeit die Prinzipien und Funktionsweisen nur kurz angeschnitten.

Die Funktionsweise des Quantencomputers baut im Wesentlichen auf dem Prinzip der Verschränkung und dem Quantenparallelismus auf. Im Gegensatz zu klassischen Computern, in denen ein Bit entweder den Wert 0 oder 1 besitzt, können im Quantencomputer die Quantenbits beide Werte zur selben Zeit annehmen. Sie befinden sich sozusagen in einem Mischzustand, der als Superposition der einzelnen Zustände bezeichnet wird. Dazu wird ein Quantenbit (Qubit) mit Hilfe der Dirac-Notation der Quantenmechanik wie folgt definiert:

$$|\text{Qubit}\rangle = \alpha \cdot |0\rangle + \beta \cdot |1\rangle \tag{6.1}$$

Dabei sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ die Wahrscheinlichkeitsamplituden für die gilt:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{6.2}$$

Das Quantenbit kann sich bei entsprechenden Amplituden gleichzeitig in zwei klassischen Zuständen befinden. Wie bei anderen Quantenobjekten liegt hier ein 2-dimensionaler Hilbertraum zu Grunde. Als Standardbasis dieses Vektorraumes können folgende Vektoren gewählt werden:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}$$
(6.3)

Die Rechenschritte auf einem Qubit laufen anders ab als bei klassischen Bits. Dabei ist eine Berechnung eine Folge von Zuständen des Rechners, bei denen die Übergänge zwischen zwei Zuständen als Rechenschritte bezeichnet werden. Besitzt ein klassisches Bit den Wert 1, so kann es im nächsten Rechenschritt nur den Wert 0 oder 1 annehmen. Das Qubit kann dagegen in einem Rechenschritt unendlich viele Zustände annehmen. Als Vergleich wird ein klassischer Rechner und einen Quantencomputer mit jeweils n Bits betrachtet. Der klassische Rechner kann damit 2^n verschiedene Zahlen darstellen, allerdings zu einem Zeitpunkt nur eine Zahl speichern. Der Quantencomputer kann hingegen mit Hilfe der Superposition 2^n Zahlen gleichzeitig darstellen und dadurch in einem Rechengang mehrere parallele Rechnungen durchführen. Somit entsteht eine Superpostionen aller möglicher Ergebnisse. Ein Übergang zwischen zwei Zuständen wird durch eine Übergangsmatrix beschrieben. Diese muss quadratisch und unitär sein. Solche unitären Transformationen haben besondere Eigenschaften. Sie bilden einen zulässigen Zustand eines Quantenbits wieder auf einen zulässigen Zustand ab. Anschaulich drehen sie die Zustandsvektoren um den Ursprung oder spiegeln diese an einer Ursprungsgeraden. Zudem sind sie durch eine inverse Abbildung umkehrbar.

Wie bei klassischen Computern können auch Quantenbits zusammengesetzt werden. Diese Folge von Bits wird als Quantenregister bezeichnet. Sin beispielsweise zwei Qubits verfügbar, welche sich jeweils in einer Superposition der Grundzustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ befinden, lassen sich folgende Zustände eines Registers erstellen:

$$|0\rangle |0\rangle =: |00\rangle$$
, $|0\rangle |1\rangle =: |01\rangle$, $|1\rangle |0\rangle =: |10\rangle$, $|1\rangle |1\rangle =: |11\rangle$

Da auch hier eine Superposition der Grundzustände möglich ist, ergibt sich für ein Register R folgender Zustand:

$$|R\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle$$
(6.4)

Bei zwei Bits liegt offensichtlich ein Hilbertraum der Dimension 4 vor. Dieser hat die obigen Grundzustände als Basis, die wiederum als Vektoren geschrieben werden können. Mit diesem Prinzip lassen sich Register mit n Qubits als Vektoren in einem 2^n -dimensionalen Hilbertraum darstellen.

Das Problem eines Qubits und der Quantenregister liegt in der Messung selbst. Der Quantenzustand eines Qubits ist nur stabil, solange er von seiner Außenwelt abgeschottet ist. Wird ein Quantenbit gelesen, beeinflusst dies seinen Zustand. Es ist nicht mehr klar, zu welcher Rechnung das Ergebnis passt. Im Gegensatz zum klassischen Bit, das einfach ausgelesen und somit sein Zustand bestimmt werden kann, muss das Qubit gemessen werden. Das Messergebnis hängt wiederum von α und β ab. Das bedeutet, dass sich ein Quantenbit nach dem Messen mit Wahrscheinlichkeit $|\alpha|^2$ im Zustand $|0\rangle$, beziehungsweise mit Wahrscheinlichkeit $|\beta|^2$ im Zustand $|1\rangle$ befindet. Somit ist nach der Messung die Überlagerung beider Zustände zerstört. Daher wird eine geschickte Art zu Messen benötigt, um die gewünschte Information aus der Überlagerung der einzelnen Zustände zu erhalten. Dies kann durch eine Veränderung der Messbasis erreicht werden. Wird die Basis durch eine Basistransformation gewechselt, bestimmt diese neue Basis das Messergebnis. Allerdings müssen auch die Vorraussetzungen von Orthogonalität und Normierung erfüllt werden. Basen mit diesen Eiegenschaften werden als Orthonormalbasen bezeichnet. Beispielsweise kann eine neue Basis wie folgt definiert werden: [Hom13]

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \tag{6.5}$$

Die ursprüngliche Basis wurde hier um 45° gedreht. Dadurch kann der bisherige Zustand aus (5.1) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} |\text{Qubit}\rangle &= \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \\ &= \alpha^{'} |+\rangle + \beta^{'} |-\rangle \\ \text{mit} \quad \alpha^{'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta), \quad \beta^{'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Das gemessene Quantenbit befindet sich somit bei dieser Messung mit Wahrscheinlichkeit $|\alpha'|^2$ im Zustand $|+\rangle$ und mit Wahrscheinlichkeit $|\beta'|^2$ im Zustand $|-\rangle$.

Eine Messung an einem Quantenbit hat folglich zwei verschiedene Resultate:

- 1. Das Ergebnis der Messung liegt in klassischer Form/information vor
- 2. Nach der Messung nehmen die Quantenbits einen bestimmten Zustand an, mit dem anschließend weiter gerechnet werden kann

Es wurden bereits die ersten Algorithmen für Quantencomputer geschrieben. Dazu gehören zum Beispiel der Algorithmus von Deutsch-Josza oder der Simons Algorithmus. Auch bekannte Probleme wurden untersucht. Der Quantencomputer ist offensichtlich in der Theorie sehr leistungsfähig, allerdings nur bei passenden Problemen. Mathematisch gesehen löst er alle Probleme schneller als ein klassischer Computer, die durch ausprobieren gelöst werden können. Daher ist er zum Beispiel beim Erraten eines Passwortes seinem Kontrahenten meist überlegen. Allerdings gibt es auch Verschlüsselungsverfahren, bei denen dieser nicht sehr erfolgreich ist. Zudem ist noch nicht klar, welche Potenziale und Möglichkeiten dieser bietet. Ob Beispielsweise eine vollständige Lösung des Strategiespiels Schach durch einen Quantencomputer und passendem Algorithmus möglich ist, kann noch nicht sicher gesagt werden. [Mat12]

6.2 Quantenteleportation

Eine Messung in einer bestimmten Basis, beziehungsweise die dadurch entstehende Manipulation an einzelnen Quantenbits, kann noch andere weitreichende Folgen haben. Manche Quantenregister können eine besondere Eigenschaft besitzen, die als Verschränkung bezeichnet wird. Sind zwei Qubits miteinander verschränkt, kann die Messung an einem von beiden, den Ausgang der Messung des anderen beeinflussen. Mit Hilfe dieser Eigenschaft ist eine "Quantenteleportation" möglich. Der Begriff Teleportation bezeichnet im Allgemeinen die Überwindung eines Raumes, bei der kein Zeitverlust existiert und keine Strecke zurückgelegt wird. Man befindet sich somit augenblicklich an einem anderen Ort. Dies widerspricht der allgemeinen Aussage der speziellen Relativitätstheorie, die besagt, dass sich kein Objekt schneller als die Lichtgeschwindigkeit bewegen kann. Unter dem Begriff Quantenteleportation versteht man deshalb die Möglichkeit, eine Information, wie zum Beispiel ein Qubit, an einem anderen Ort rekonstruieren zu können. Man transportiert oder teleportiert keine einzelnen Teilchen, sondern kopiert die gewünschte Nachricht an dem Zielort. Eine exakte Kopie ist allerdings nur möglich, wenn die verschiedenen Zustände orthogonal zueinander sind. In den anderen Fällen kann nach einer Kopie nur das neue Objekt bestehen bleiben. Dies wird unter dem Resultat namens "nocloning theorem" festgehalten. Die Quantenteleportation ist ein sehr effizientes und sicheres Verfahren, um Informationen von A nach B zu senden. [Hom13]

Genau wie klassische Informationen in Leiter transportiert werden, werden

solche auch für Quantenobjekte benötigt. Quantenbits werden in einem Quantenkanal transportiert. Bei Photonen könnte dies zum Beispiel eine Glasfaser sein. Dabei können auch während des Transportes von Qubits Störungen auftreten. Ist dies der Fall, wird der Kanal als verrauscht bezeichnet. Sind Störungen vorhanden, ändert sich der Zustand des Qubit, was bedeutet, dass der Zustand $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ in $\alpha' |0\rangle + \beta' |1\rangle$ übergeht. Je nach Störungsgrad ist die Abweichung von α und β größer oder kleiner.

58

Bei einer Quantenteleportation fehlt diese Art von Quantenkanal zwischen dem Sender und Empfänger, da keine einzelnen Objekte transportiert werden. Das Einzige, was zusätzlich benötigt wird, ist eine klassische Verbindung, wie zum Beispiel ein Telefon. Soll eine Information in Form eines Qubits von A nach B gesendet werden, wird folgendermaßen vorgegangen:

Das zu übertragende Quantenbit bei A habe den Zustand $|x\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$. Beide Orte benötigen ein zusätzliches Qubit eines verschränkten Paares. Dieses sei im Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Mit Hilfe von Rechenoperationen können die beiden Qubits bei A miteinander verschränkt werden. Dadurch ergibt sich ein Zustand, der sich wie folgt darstellt:

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= \frac{1}{2} \Big[|00\rangle \left(\alpha (|0\rangle + \beta |1\rangle) + |01\rangle \left(\beta |0\rangle + \alpha |1\rangle \right) \\ &+ |10\rangle \left(\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle \right) - |11\rangle \left(\beta |0\rangle - \alpha |1\rangle \right) \Big] \end{aligned}$$

Die gekoppelten Zustände sind in diesem Fall durch die beiden Qubits bei A gegeben. Je nach Zustand dieser beiden Qubits nimmt das Qubit bei B einen anderen Zustand ein. Nun wird bei A eine Bell-Messung durchgeführt, d.h. die beiden Qubits befinden sich nach der Messung in einem der vier Grundzustände, jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$. Nach der Messung wird das Qubit bei B auf Grund der Verschränkung augenblicklich festgelegt. Dadurch ergeben sich folgende Möglichkeiten:

- Zustand $|00\rangle$ bei A \rightarrow Zustand $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ bei B
- Zustand $|01\rangle$ bei A \rightarrow Zustand $\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle$ bei B
- Zustand $|10\rangle$ bei A \rightarrow Zustand $\alpha |0\rangle \beta |1\rangle$ bei B
- Zustand $|11\rangle$ bei A \rightarrow Zustand $\alpha |1\rangle \beta |0\rangle$ bei B

Offensichtlich ist beim ersten Ausgang dieser Messung das Qubit bei B bereits im gewünschten Zustand. Die Übertragung war somit erfolgreich. In den an-



Abbildung 30: Aufbau Quantenteleportation: Ein Sender will die Nachricht C übermitteln. Dazu wird C mit verschränktem Qubit A gekoppelt. Nach einer Bell-Messung an A und C ist der Zustand beim Sender bekannt, welcher über eine klassische Leitung (2 Bits) zum Empfänger übermittelt wird. Anschließend wird durch eine passende Transformation von B, die Nachricht C rekonstruiert. [Wik14]

deren drei Fällen kann der gewünschte Zustand nun leicht hergestellt werden. Dazu muss zunächst das Ergebnis bei A bekannt sein. Deshalb wird an dieser Stelle eine klassische Kommunikation zwischen A und B benötigt, bei welcher dem Ort B, das Ergebnis aus der Messung A mitgeteilt wird. Je nach Ergebnis wird das Qubit bei B verändert. Dies wird durch Anwendungen diverser Matrizen erreicht. [Hom13]

Dieses Verfahren wurde erstmals 1997 in Innsbruck praktisch umgesetzt. Dabei wurde ein Quantenbit über eine Strecke von etwa einem Meter teleportiert. In der Theorie ist die Entfernung von verschränkten Quantenbits nicht von Bedeutung. Allerdings stellt es sich in der Praxis als schwierig heraus, ideale Quantenkanäle zu konstruieren. Als Folge werden durch das Verrauschen die Zustände minimal verändert. 2015 haben US-Physiker in einer 100 Kilometer langen Strecke eine Teleportation vollzogen. Die Distanz lag allerdings nicht zwischen zwei entfernten Orten, sondern auf einer langen aufgewickelten Glasfaser. [Mat12]

6.3 Kartenspiel

Es gibt verschiedene Szenarien, bei denen die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie versagt. Dazu nimmt man beispielsweise folgendes Kartenspiel nach Florian Karsten als Gedankenexperiment. Dieses ist im Anhang beigefügt. [Kü98]

Zwei Spieler sitzen am Tisch und spielen ein Kartenspiel miteinander. Jeder der Spieler bekommt zu Beginn der Runde eine Karte verdeckt ausgeteilt, die entweder die Farbe Rot oder Schwarz besitzt. Nachdem jeder Spieler seine Karte angeschaut hat, sagen die beiden Spieler unabhängig voneinander entweder "Ja" oder "Nein". Wie sie sich entscheiden, ist diesen selbst überlassen. Anschließend werden die beiden verdeckten Karten aufgedeckt. Haben beide Spieler das Gleiche gesagt, wird eine 1 in eines der vier Felder des Spielplans geschrieben, im anderen Fall eine 0. Das Feld wird dadurch bestimmt, was die jeweiligen Farben der Karten sind.



Abbildung 31: Spielfeld: Die einzelnen Felder stehen für die jeweilige Karten der beiden Spieler. Feld RR bedeutet beispielsweise, dass beide Spieler eine Rote Karte bekommen haben [Kü98]

Es werden mehrere Runden gespielt. Das Ziel des Spieles ist es, den prozentualen Anteil der gesamten Anzahl an Einsen (A_{RR}) im Feld RR zu maximieren. Um zu gewinnen, muss folglich gelten:

$$A_{RR} > A_{RS} + A_{SR} + A_{SS} \tag{6.6}$$

Beide Spieler müssen so oft wie möglich die gleiche Antwort geben, falls ihre Karten Rot sind. In den anderen Fällen sollten sie möglichst oft unterschiedliche Antworten geben.

Den Spielern ist es erlaubt, sich vor dem Spiel eine gemeinsame Strategie zu überlegen. Nach Beginn des Spiels ist eine Kommunikation untereinander allerdings verboten. Unabhängig von der Strategie, die im Gültigkeitsbereich der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie gewählt wird, kann dieses Spiel nicht gewonnen werden. Mit Hilfe der Quantentheorie und verschränkter Photonen ist dies allerdings möglich. Dazu wird folgender Aufbau betrachtet:

In der Mitte des Tisches befinde sich eine Quelle, die verschränkte Photonenpaare erzeugt. Die einzelnen Photonen fliegen in entgegengesetzte Richtungen zu den Spielern. Nun stellen die beiden Spieler einen Polarisationsfilter vor sich auf. Dieser wird je nach gezogener Karte auf einen bestimmten Winkel eingestellt, was zum Beispiel folgendermaßen aussehen könnte:

	Sp	oieler 1	Spieler 2	
Farbe	Rot	Schwarz	Rot	Schwarz
Winkel	0°	60°	90°	30°

Tabelle 2: Einstellung der Polarisationsfilter

Wenn jeder Spieler nur dann "Ja" sagt, wenn sein Photon durch den Filter kommt, ergeben sich folgende Werte:

$$A_{RR} = 1$$
 $A_{RS} = A_{SR} = A_{SS} = \frac{1}{4}$

Es gelingt ihnen also nach Gleichung (5.6) das Spiel zu gewinnen.

Diese Werte basieren auf den Gesetzten der Quantenwahrscheinlichkeit, ähnlich wie bei der Bell-Messung. Dadurch lässt sich eine Korrelation zwischen beiden Spielern herstellen, die nicht mit klassischen Methoden erreicht werden kann.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Experiment entwickelt, mit welchem eine klassische Korrelation zwischen Farbteilchen bestimmt werden kann. Dieses Experiment liefert als Analogie-Versuch zur Bell-Messung an verschränkten Photonenpaaren einen Bezug zu den Prinzipien der Verschränkung und Nichtlokalität sowie der Bell-Ungleichung.

Zudem wurde untersucht, ob es auch bei dem vorgestellten Farbenmodell möglich ist, eine verschränkte Korrelation zwischen zwei Farbteilchen zu messen. Es hat sich herausgestellt, dass dies nur unter gewissen Voraussetzungen möglich ist. Zum einen ist eine Quelle zur Erzeugung von verschränkten Farbteilchen sowie ein Farbfilter mit nicht-linearer Abschwächung nötig. Des Weiteren fehlt die projizierende Eigenschaft der Photonen. Eine Abweichung der klassischen Korrelationsfunktion ist in diesem Modell ohne diese Modifikationen nicht möglich. Folglich kann in dieser Messung die Bellsche-Ungleichung nicht verletzt werden. Es liegt somit eine lokal-realistische Theorie vor.

Das Experiment bezüglich der Farbteilchen konnte in der Bearbeitungszeit dieser wissenschaftlichen Arbeit nicht komplett fertiggestellt werden, da der größte Teil der Bauteile selbständig entwickelt und von der mechanischen Werkstatt der Universität Stuttgart hergestellt wurde. Daher konnten bezüglich diesem Modell noch keine Messungen vorgenommen werden.

Die Fertigstellung des Exponates wird im Anschluss an diese Arbeit fortgeführt. Es wird so konstruiert, dass das Experiment für Ausstellungen oder Messen geeignet ist und vor Ort eine Messung durch Besucher selbständig durchgeführt werden kann.

Als Ergänzung zu den vorhandenen Quantenexperimenten des Schülerlabors wurde ein weiteres Exponat "Der Lichtdreher" während dieser Arbeit fertiggestellt. Dieser Experimentiertisch wird im kommenden Monat erstmals in einer öffentlichen Ausstellung zu finden sein. Er verdeutlicht das Prinzip der Projektion und Polarisation von Licht. Im Anhang befindet sich eine kurze Beschreibung dieses Exponates.

Literatur

- [AE35] A. EINSTEIN, N. R. B. Podolsky P. B. Podolsky: Can quantummechanical description of physical reality be considered complete?
 In: *Physical Review Vol.* 47 (1935). – Zugriffsdatum: 17.05.2016
- [Aka15] AKAMA, Seiki: Elements of quantum computing. Springer, 2015
- [Asp02] Kapitel Bell's Theorem: The Naive View of an Experimentalist.
 In: ASPECT, Alain: Quantum [Un]speakables: From Bell to Quantum Information. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2002, S. 119–153. Zugriffsdatum: 17.05.2016
- [Bag04] BAGGOTT, Jim: Beyond measure: modern physics, philosophy and the meaning of quantum theory. 1. publ. Oxford [u.a.] : Oxford Univ. Press, 2004. - XVI, 379 S.. - ISBN 0-19-852927-9
- [Bec12] BECK, Mark: Quantum mechanics: theory and experiment. Oxford
 [u.a.]: Oxford University Press, 2012. XX, 508 S.. ISBN 978– 0–19–979812–4
- [Bel64] BELL, J.S.: On the Einstein Podolsky Rosen paradox. In: *Physics Vol. 1* (1964), S. 195–200. Zugriffsdatum: 17.05.2016
- [CHSH69] CLAUSER, John F. ; HORNE, Michael ; SHIMONY, Abner ; HOLT, Richard A.: Proposed experiment to test local hidden-variable theories. In: *Physical Review Letters Vol. 23* (1969). – Zugriffsdatum: 17.05.2016
- [Cor00] CORNELSEN: Oberstufe Physik, Gesamtband. 1. Auflage. Cornelsen Verlag, 2000
- [Dem10] DEMTRÖDER, Wolfgang: Atome, Moleküle und Festkörper: mit ... 48 Tabellen, zahlreichen durchgerechneten Beispielen und 151 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen. 4., überarb. Aufl. Berlin; Heidelberg : Springer, 2010. – XXI, 650 S.. – ISBN 978– 3–642–03910–2
- [Dem13] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Elektrizität und Optik.* 6., überarb. und akt. Aufl. Berlin; Heidelberg : Springer Spektrum, 2013. – XVI, 480 S.. – ISBN 978–3–642–29943–8

- [Dem15] DEMTRÖDER, Wolfgang: Mechanik und Wärme. 7., neu bearb. und aktualisierte Aufl. Berlin; Heidelberg : Springer-Spektrum, 2015. – XVI, 470 S. http://d-nb.info/1068077549/04. – ISBN 978–3–662–46414–4
- [Dem16] DEMELE, Fabian: Eigene Darstellungen, die im Rahmen dieser Arbeit erstellt wurden. (2016). – (inklusive Bildquellen)
- [Dro09] DROBISCH, Amos: Das EPR-Gedankenexperiment, die Bellsche Ungleichung und der experimentelle Nachweis von Quantenkorrelationen. http://llp.ilt.fhg.de/skripten/hausarbeit_ drobisch.pdf. Version: 2009. – Zugriffsdatum: 12.04.2016
- [EHB69] EINSTEIN, Albert ; HEDWIG, Born; ; BORN, Max: Briefwechsel: 1916 - 1955. München : Nymphenburger Verl.-Handlung, 1969. – 329 S.
- [Fey89] FEYNMAN, Richard P.: QED: die seltsame Theorie des Lichts und der Materie. 2. Aufl. München [u.a.] : Piper, 1989
- [Fim15] FIMPEL, Peter: Spontaneous parametric down-conversion in a BBO crystal. 2015. – Zugriffsdatum: 17.05.2016
- [Gis14] GISIN, Nicolas: Der unbegreifliche Zufall: Nichtlokalität, Teleportation und weitere Seltsamkeiten der Quantenphysik. Berlin; Heidelberg : Springer Spektrum, 2014. – 223 S.. – ISBN 978–3–662– 43957–9
- [Gud06] GUDERIAN, Priemer Pascal; B. Pascal; Burkhard: In den Unterricht eingebundene Schülerlaborversuche und deren Einfluss auf das aktuelle Interesse an Physik. In: *Phydid* (2006). – Zugriffsdatum: 17.05.2016
- [Gud08] GUDERIAN, Priemer Pascal; B. Pascal; Burkhard: Interessensförderung durch Schülerlaborbesuche - eine Zusammenfassung der Forschung in Deutschland. In: *Phydid* (2008). – Zugriffsdatum: 17.05.2016

- [Hom13] HOMEISTER, Matthias: Quantum Computing verstehen: Grundlagen - Anwendungen - Perspektiven. 3. Aufl. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2013. - XII, 305 S. http://swbplus.bszbw.de/bsz381205029cov.htm. - ISBN 978-3-8348-1868-3
- [Kü98] KÜMMERER, H. B.; M. B.; Maassen: Elements of quantum probability. Vol. X. World Scientific Publishing Company, 1998
- [Kel14a] KELLER, Klaus D.: Hüufigkeitsverteiluung ohne Interferenzmuster. (2014). https://de.wikipedia.org/wiki/ Quantenradierer#/media/File:Slit_double_57_8.svg. - Zugriffsdatum: 17.05.2016 (Bildquelle)
- [Kel14b] KELLER, Klaus D.: Intensitätsverteilung beim Doppelspalt (unbeobachtet). (2014). https://de.wikipedia.org/wiki/ Quantenradierer#/media/File:Slit_double_57_8.svg. - Zugriffsdatum: 17.05.2016 (Bildquelle)
- [KMF03] KÜBLBECK, Josef ; MÜLLER, Rainer ; FARBER, Max U.: Die Wesenszüge der Quantenphysik - Modelle, Bilder, Experimente.
 3. unveränd. Neuaufl. Aulis-Verlag Deubner, 2003. – ISBN 978– 3-761-42506-0
- [KWW⁺99] KWIAT, Paul G. ; WAKS, Edo ; WHITE, Andrew G. ; APPEL-BAUM, Ian ; EBERHARD, Philippe H.: Ultrabright source of polarization-entangled photons. In: *Physical Review A Vol. 60*, *Number 2* (1999). – Zugriffsdatum: 17.05.2016
- [Mü09] MÜLLER, Sophia: Frequenzverschränkung bei der parametrischen Fluoreszenz. http://xqp.physik.unimuenchen.de/publications/files/theses_bachelor/ bachelor_muellers.pdf. Version: 2009. – Zugriffsdatum: 11.02.2016
- [Mü10] MÜNSTER, Gernot: Quantentheorie. 2., überarb. u. erw. Aufl.
 Berlin; New York : de Gruyter, 2010. XII, 396 S. http://d nb.info/999262254/04. ISBN 978–3–11–021528–1
- [Mat12] MATTING, Matthias: Wie der Quanten-Computer funktioniert. (2012). http://www.heise.de/tp/artikel/37/37249/1.html. - Zugriffsdatum: 17.05.2016
| [Obe02] | OBERPARLEITER, Markus: Effiziente Erzeugung verschränk-
ter Photonenpaare. https://edoc.ub.uni-muenchen.de/350/
1/Oberparleiter_Markus.pdf. Version: 2002. – Zugriffsdatum:
18.03.2016 |
|-----------------------|--|
| [PJ10] | PEARSON, Brett J.; JACKSON, David P.: A hands-on introduction
to single photons and quantum mechanics for undergraduates.
In: Am. J. Phys. Vol. 78, Number 5 (2010). – Zugriffsdatum:
17.05.2016 |
| [Qua] | QUANTUMLAB: Verschränkung Kapitel B: Wie werden ver-
schränkte Photonen erzeugt? http://www.didaktik.physik.
uni-erlangen.de/quantumlab/index.html?/quantumlab/
Schuelerlabor/ Zugriffsdatum: 23.05.2016 (Bildquelle) |
| [RD91] | RITTER, Alexander (Hrsg.) ; DÜRRENMATT, Friedrich (Hrsg.):
Friedrich Dürrenmatt, Die Physiker. Stuttgart : Reclam, 1991. –
243 S – ISBN 3–15–008189–0 |
| [Sch35] | SCHROEDINGER, Erwin: Die gegenwärtige Situation in der Quan-
tenmechanik. In: <i>Die Naturwissenschaften, 23</i> (1935). – Zugriffs-
datum: 17.05.2016 |
| [Sch15] | SCHULZ, Thomas: Google und Nasa präsentieren Quantencompu-
ter. In: <i>Spiegel</i> (2015). http://www.spiegel.de/netzwelt/web/
google-und-nasa-praesentieren-ihren-quantencomputer-
a-1066838.html. – Zugriffsdatum: 17.05.2016 |
| [sci] | SCIENCEV1.ORF: Interferenzbild Doppelspalt. http:
//sciencev1.orf.at/static2.orf.at/science/storyimg/
storypart_90849.gif Zugriffsdatum: 17.05.2016 (Bildquelle) |
| $[\mathbf{S}_{0};12]$ | SEILNACHT Thomas: Doppologaltworsuch (1006-2013) http:// |

- [Sei13] SEILNACHT, Thomas: Doppelspaltversuch. (1996-2013). http://
 www.seilnacht.com/Lexikon/f_doppel.gif. Zugriffsdatum:
 17.05.2016 (Bildquelle)
- [SS08] STOLZE, Joachim ; SUTER, Dieter: Quantum computing: a short course from theory to experiment. 2., updated and enl. ed. Weinheim : WILEY-VCH, 2008. - XVII, 265 S. http://swbplus.bszbw.de/bsz276494121cov.htm. - ISBN 978-3-527-40787-3

[Tah16]	TAHA, Saleem Mohammed R.: Reversible Logic Synthesis Metho- dologies with Application to Quantum Computing. 1st ed. 2016.Springer, 2016
[Wik11]	WIKIPEDIA: Spontaneous parametric down-conversion. (2011). https://en.wikipedia.org/wiki/Spontaneous_parametric_ down-conversion#/media/File:SPDC_figure.png Zugriffs- datum: 23.05.2016 (Bildquelle)
[Wik14]	WIKIPEDIA: Quantenteleportation. (2014). https://de. wikipedia.org/wiki/Quantenteleportation#/media/File: Teleportation.svg Zugriffsdatum: 17.05.2016 (Bildquelle)
[Zei98]	ZEILINGER, A.: Violation of Bell's inequality under Strict Einstein Locality Conditions. In: <i>Physical Review Letters Vol. 81</i> (1998). – Zugriffsdatum: 17.05.2016

Abbildungsverzeichnis

1	Versuchsaufbau Doppelspalt-Experiment
2	Interferenzmuster Doppelspalt
3	Auftreffwahrscheinlichkeit mit Interferenzmuster
4	Auftreffwahrscheinlichkeit ohne Interferenzmuster 8
5	Drehung
6	Aufbau EPR Gedankenexperiment
7	Entartete Fluoreszenz
8	Typ-II
9	Versuchsaufbau Bell-Messung
10	Versuchsaufbau Farbenmodell
11	Kugellager Bottom
12	Kugellager Deckel
13	Filterrohr
14	Quellrad (Vorderansicht) $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 32$
15	Quellrad (Hinteransicht)
16	Filterrad (outer part)
17	Filterrad (inner part)
18	Filterrad
19	sgn-Funktion für α , $\beta = 0$
20	Klassische Korrelationsfunktion - Photonen
21	Verschränkte Korrelationsfunktion - Photonen
22	Klassische Korrelationsfunktion - Farbenmodell
23	Vektordarstellung eines Farbzustandes
24	Mögliche Farbzustände
25	Verschränkte Korrelationsfunktion - Farbenmodell
26	Vergleich der Korrelationsfunktionen
27	D-Wave Quantencomputer
28	Quantenchip D-Wave
29	Qubits
30	Aufbau Quantenteleportation
31	Spielfeld
32	Lichtdreher 1
33	Lichtdreher 2

Tabellenverzeichnis

1	Messwerte der Bell-Messung	8
2	Einstellung der Polarisationsfilter	1

Anhang

Lichtdreher

Der Lichtdreher ist ein Experiment, welches aufzeigt, dass Licht aus einer Superposition von horizontal und vertikal polarisierten Anteilen besteht. Zudem kann verdeutlicht werden, was eine projizierende Abbildung ist.

Der Aufbau dieses Exponats ist in den Abbildungen 32 und 33 zu sehen. In einem Holzkasten, der in der Schreinerei der Universität Stuttgart angefertigt wurde, befindet sich eine LED, die als Lichtquelle dient. Diese strahlt Licht durch die vordere Öffnung aus. In diesen Lichtstrahl können per Hebel mehrere Polarisationsfilter gestellt werden. Diese sind frei drehbar und können beliebig eingestellt werden.



Abbildung 32: Lichtdreher1 [Dem16]



Abbildung 33: Lichtdreher2 [Dem16]

Das Ziel ist es, eine Drehung des Lichtes um 90° zu erreichen, bei der möglichst wenig Intensität verloren geht. Dazu werden zunächst der erste und letzte Filter senkrecht zueinander eingestellt. Es zeigt sich, dass kein Licht mehr durchkommt. Mit Hilfe der anderen Polarisationsfilter, die zwischen diese beiden gesetzt werden, kann das Licht wieder sichtbar gemacht werden, wenn alle in einem richtigen Winkel eingestellt werden. Diese Positionen gilt es zu bestimmen.

Konstruktionszeichnungen

In diesem Abschnitt befinden sich die Konstruktionszeichnungen der Bauteile, die für den Versuch konzipiert und von der mechanischen Werkstatt hergestellt wurden. Für das Entwerfen dieser Bauteile wurde die Software Autodesk Inventor 2016 verwendet.











Ein Kartenspiel

Das folgende Kartenspiel wurde von Florian Karsten mithilfe B. Kümmerers und H. Maasens "Elements of quantum probability" entworfen. In Abschnitt 6.2 wurde dies zusammengefasst und darauf Bezug genommen. [Kü98]



herigen Absprache. Sagen beide "ja" oder beide "nein", so wird eine 1 in eines der vier Felder geschrieben, ansonsten eine 0. Das Feld wird zufällig mit Hilfe der Karten bestimmt, die der Schiedsrichter nun aufdeckt. Die Felder sind mit RR, RS, SR und SS beschriftet. Haben beide Spieler rot, so ist es das Feld RR, hat Peter rot und Paul schwarz, so ist es RS, hat Peter schwarz und Paul rot, dann ist es SR, und haben beide schwarz, so wird die 1 oder 0 in das Feld SS geschrieben.

Ziel des Spieles.

Mit der Zeit füllen sich die vier Spielfelder mit Einsen und Nullen. Für jedes Feld führt der Schiedsrichter Buch über den momentanen prozentualen Anteil von Einsen an der Gesamtzahl der in diesem Feld eingetragenen Ziffern. Um zu gewinnen müssen Peter und Paul dafür sorgen, dass langfristig in Feld RR dieser Anteil (A_{RR}) größer wird als die entsprechenden Anteile (A_{RS} , A_{SR} , A_{SS}) in den anderen drei Feldern zusammen. Als Formel:

$A_{RR} > A_{RS} + A_{SR} + A_{SS} \label{eq:ARR}$

Peter und Paul müssen also so oft wie möglich die gleiche Antwort geben, falls beide Karten rot sind. In allen anderen Fällen sollten sie möglichst oft unterschiedliche Antworten geben.

Klassische Strategie.

Eine Variante der Bellschen Ungleichung sagt nun aus: Wählen Peter und Paul eine beliebige Strategie im Gültigkeitsbereich der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie, so können sie das Spiel nicht gewinnen.

Quanten-Strategie.

Und dennoch haben Peter und Paul eine Möglichkeit, das Spiel zu gewinnen – mit der Quantentheorie. Die beiden legen ein Kalziumatom auf den Tisch. Dieses hat die Eigenschaft, unter bestimmten Vorraussetzungen ein Photonenpaar zu erzeugen. Die einzelnen Photonen fliegen in entgegengesetzte Richtungen weg und auf Peter bzw. Paul zu. Die beiden stellen vor sich je einen Polarisationsfilter, den sie entsprechend ihrer gezogenen Karte einstellen: Hat Peter rot, so stellt er ihn waagrecht auf 0 Grad, hat er schwarz, so wählt er einen Winkel von 60 Grad. Falls Paul eine rote Karte bekommen hat, stellt er seinen Filter auf 90 Grad, sonst auf 30 Grad. Nun sagt jeder Spieler für sich "ja", falls sein Photon durch den Filter zu ihm kommt, und "nein", falls nicht. Dann gilt nämlich

$$A_{RR} = 1$$
 und $A_{RS} = A_{SR} = A_{SS} = 1/4$

Peter und Paul werden also das Spiel gewinnen!

F. Karsten

Seite 1 von 2

EPR_Kartenspiel.doc

Die Erklärung

Es ist möglich, Kalzium-Atome mit Hilfe eines Lasers so anzuregen, dass sie beim Sprung zurück in den Grundzustand ein Photonenpaar mit besonderen Eigenschaften entsenden: Die beiden Photonen fliegen in entgegengesetzte Richtungen auseinander. Sie besitzen aufgrund des Drehimpulserhaltungssatzes die Spins +1/2 bzw. -1/2 und haben daher bezüglich einer beliebig gewählten Richtung die Polarisationsrichtungen 0 Grad bzw. 90 Grad.

Nun werden Polarisationsmessungen durchgeführt¹. Auf der linken Seite des Kalzium-Atoms wird nun zufällig entweder die Polarisationsrichtung α_1 oder α_2 gemessen, auf der rechten Seite zufällig die Polarisationsrichtung β_1 oder β_2 . Daraus ergeben sich vier Zufallsvariable A₁, A₂, B₁, B₂, die jeweils die Werte 1 (Photon kommt durch) oder 0 (Photon kommt nicht durch) annehmen können.

Für diese vier Zufallsvariablen gilt eine Version der Bellschen Ungleichung:

 $P(A_1=B_1) \le P(A_1=B_2) + P(B_2=A_1) + P(A_2=B_2)$

 $P(A_1=B_1)$ bedeutet, dass links der Filter im Winkel α_1 und rechts der Filter im Winkel β_1 eingestellt ist, und dass beide Photonen durchkommen oder beide Photonen nicht durchkommen. Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit?

Da die beiden Photonen zueinander orthogonale Polarisationsrichtungen besitzen, kann man die Wahrscheinlichkeit aus folgender Versuchsanordnung bestimmen: Ein Photon durchläuft nacheinander zwei Polarisationsfilter mit den Winkeln α und β . Wir suchen jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass das Photon durch den ersten Filter kommt, nicht aber durch den zweiten.

Messungen der Lichtintensität haben gezeigt, dass ein Photon durch den ersten Filter mit Wahrscheinlichkeit 1/2 kommt. Durch den zweiten Filter kommt das Photon mit Wahrscheinlichkeit $\cos^2(\alpha-\beta)$. Also kommt es durch beide mit Wahrscheinlichkeit $1/2 \cos^2(\alpha-\beta)$.

Nun brauchen wir etwas elementare Wahrscheinlichkeitstheorie: Die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis 1 passiert und Ereignis 2 nicht passiert, ist gleich groß wie die Differenz der Wahrscheinlichkeit, dass sich nur Ereignis 1 ereignet, und der Wahrscheinlichkeit, dass sich Ereignis 1 und Ereignis 2 ereignen. In Formeln:

$$P(E1 \land \neg E2) = P(E1) - P(E1 \land E2)$$

In unserem Photonenexperiment ergibt sich somit für die Wahrscheinlichkeit, durch den ersten und nicht durch den zweiten Filter zu kommen,

$1/2 - 1/2 \cos^2(\alpha - \beta) = 1/2 \sin^2(\alpha - \beta).$

Zurück zum ursprünglichen Problem: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass links der Filter im Winkel α_1 und rechts der Filter im Winkel β_1 eingestellt ist, und dass beide Photonen durchkommen oder beide Photonen nicht durchkommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide durchkommen ist nach obigen Überlegungen $1/2 \sin^2(\alpha_1 - \beta_1)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide nicht durchkommen ist auch $1/2 \sin^2(\alpha_1 - \beta_1)$. Damit ist

 $P(A_1=B_1) = sin^2(\alpha_1-\beta_1).$

Die weiteren Wahrscheinlichkeiten ergeben sich analog. Die Bellsche Ungleichung lautet nun:

 $\sin^2(\alpha_1 - \beta_1) \leq \sin^2(\alpha_1 - \beta_2) + \sin^2(\alpha_2 - \beta_1) + \sin^2(\alpha_2 - \beta_2).$

Setzt man für die Polarisationsfilter folgende Winkel an,

$$\alpha_1 = 0$$
 Grad, $\alpha_2 = 60$ Grad, $\beta_1 = 90$ Grad, $\beta_2 = 30$ Grad,

so erhält man

$1 \le 1/4 + 1/4 + 1/4$

und die Bellsche Ungleichung ist verletzt!

Mit klassischen Strategien, die die Bellsche Ungleichung erfüllen müssen, ist das Kartenspiel also nicht zu gewinnen. Aber das Kalzium-Atom als quantenmechanischer Würfel macht möglich, was klassisch unmöglich ist!

¹ Dieses Experiment wurde ursprünglich von A. Aspect im Jahre 1982 durchgeführt.

F. Karsten

Seite 2 von 2

EPR_Kartenspiel.doc

Internetquellen

Hier befinden sich alle verwendeten Quellen (inklusive Bildquellen) aus dem Internet, sowie jeweils ein Auszug der ersten Seite.





III.5 ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*

John S. Bell[†]

I. Introduction

THE paradox of Einstein, Podolsky and Rosen [1] was advanced as an argument that quantum mechanics could not be a complete theory but should be supplemented by additional variables. These additional variables were to restore to the theory causality and locality [2]. In this note that idea will be formulated mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of quantum mechanics. It is the requirement of locality, or more precisely that the result of a measurement on one system be unaffected by operations on a distant system with which it has interacted in the past, that creates the essential difficulty. There have been attempts [3] to show that even without such a separability or locality requirement on "hidden variable" interpretation of quantum mechanics is possible. These attempts have been examined elsewhere [4] and found wanting. Moreover, a hidden variable interpretation of elementary quantum theory [5] has been explicitly constructed. That particular interpretation has indeed a grossly non-local structure. This is characteristic, according to the result to be proved here, of any such theory which reproduces exactly the quantum mechanical predictions.

II. Formulation

With the example advocated by Bohm and Aharonov [6], the EPR argument is the following. Consider a pair of spin one-half particles formed somehow in the singlet spin state and moving freely in opposite directions. Measurements can be made, say by Stern-Gerlach magnets, on selected components of the spins $\vec{\sigma}_1$ and $\vec{\sigma}_2$. If measurement of the component $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$, where \vec{a} is some unit vector, yields the value +1 then, according to quantum mechanics, measurement of $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{a}$ must yield the value -1 and vice versa. Now we make the hypothesis [2], and it seems one at least worth considering, that if the two measurements are made at places remote from one another the orientation of one magnet does not influence the result obtained with the other. Since we can predict in advance the result of measuring any closen component of $\vec{\sigma}_2$, by previously measuring the same component of $\vec{\sigma}_1$, it follows that the result of any such measurement must actually be predetermined. Since the initial quantum mechanical wave function does not determine the result of an individual measurement, this predetermination implies the possibility of a more complete specification of the state.

Let this more complete specification be effected by means of parameters λ . It is a matter of indifference in the following whether λ denotes a single variable or a set, or even a set of functions, and whether the variables are discrete or continuous. However, we write as if λ were a single continuous parameter. The result A of measuring $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ is then determined by \vec{a} and λ , and the result B of measuring $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ in the same instance is determined by \vec{b} and λ , and

*Work supported in part by the U.S. Atomic Energy Commission [†]On leave of absence from SLAC and CERN

Originally published in Physics. 1, 195-200 (1964).



SPONTANEOUS PARAMETRIC DOWN-CONVERSION IN A BBO CRYSTAL

MASTERARBEIT

vorgelegt von

Peter Fimpel

Hauptberichter: PROF. DR. TILMAN PFAU Mitberichter: PROF. DR. PETER MICHLER

5. Physikalisches Institut, Universität Stuttgart 29. Mai 2015









Wie der Quanten-Computer funktioniert | Telepolis (Print)

http://www.heise.de/tp/druck/mb/artikel/37/37249/1.html

TELEPOLIS

Wie der Quanten-Computer funktioniert

Matthias Matting 13.07.2012

Geheimdienste fürchten sie, Forscher hoffen, mit ihnen bislang unlösbare Probleme berechenbar zu machen: Quanten-Computer gelten als beinahe magische Maschinen

Mein Hahn ist tot. Mon coq est mort. Das sind zwei sehr unterschiedliche Sätze, auch wenn sie jeweils aus vier Wörtern bestehen. Auf grundlegender Ebene haben sie aber eine Gemeinsamkeit: Sie enthalten die gleiche Information, die von der sprachlichen Verkörperung unabhängig ist. Es gibt sehr viele, unendliche viele Möglichkeiten, die gleiche Information darzustellen, so wie Energie in den verschiedensten Formen auftreten kann. Trotzdem, das weiß jeder Übersetzer, muss bei der Umwandlung aus einer Form in die andere der Kern, die Information, immer konstant bleiben: Mein Hahn ist tot.

Es gibt eine weitere Ähnlichkeit zwischen Energie und Information: Auch die Information besitzt eine Einheit. Weil der Begriff erst viel später aufkam, war sofort klar, dass sie quantisiert sein muss, also in nicht mehr teilbaren Brocken auftritt. Diese Informationsquanten sind die Bits. Ein Bit kann genau zwei Zustände einnehmen. Gern wird das Bild von 0 und 1 gebraucht - aber ebenso könnte man die zwei Zustände durch Ein und Aus, Heiß und Kalt, Kurz und Lang, Loch und kein Loch realisieren. Wie beim toten Hahn kommt es nicht auf die Form der Darstellung, sondern auf die Information selbst an.

Bei der Konstruktion klassischer Computer hat man sich immer schlauere Methoden gesucht, 0 und 1 umzusetzen. Auf der ganzen Welt, schätzte das Marktforschungsunternehmen IDC, gab es 2011 insgesamt etwa 1800 Exabytes an digital vorliegenden Informationen. Das ist ungefähr so viel Datenmaterial, als besäße jeder Mensch auf der Erde etwa 20.000 Bücher. Pro Jahr wächst dieser riesige Datenvorrat um 60 Prozent. Doch obwohl dem Wachstum keine Grenzen gesetzt scheinen, sind klassische Rechner Beschränkungen unterworfen, die in ihrer Natur liegen.

Betrachten wir nur eine simple Aufgabe: die Primfaktorenzerlegung einer natürlichen Zahl. Schulstoff aus der fünften oder sechsten Klasse also: Es geht darum, eine Zahl als Produkt anderer, nur durch sich selbst und 1 teilbarer Zahlen (sogenannter Primzahlen) darzustellen. 10 ist das Produkt aus den Primzahlen 2 und 5. 21 lässt sich in die Primfaktoren 3 und 7 zerlegen. Es gibt dafür maschinelle Verfahren, Algorithmen, die das Problem mit Computerhilfe lösen. Doch obwohl die allerschnellsten Supercomputer heute Billiarden Rechenschritte pro Sekunde ausführen können, bräuchten sie für die Primfaktorenzerlegung einer 300-stelligen Zahl noch immer etwa 150 Jahre.

Wofür ein Supercomputer heute noch 150 Jahre braucht, dafür benötigen sie gerade noch eine Sekunde

Das freut all die, die Daten zu sichern haben, denn viele moderne

1 von 7

27.02.2016 09:13







471 Am. J. Phys. 78 (5), May 2010

are never perfect, and there is always a possibility of mea-suring an accidental coincidence by chance. The first detailed

experiments examining such intensity correlations took place

http://aapt.org/ajp

© 2010 American Association of Physics Teachers

471

and single-photon states have been incorporated into the un-dergraduate curriculum²³⁻²⁵ and are one of the few ways students can easily observe a quantum-mechanical effect. The field has developed rapidly, thanks to technological advances and to the pioneering work of three groups.^{26–31} Much of what we present here is motivated by these studies.



SPECEL ONLINE 09. Dezember 2015, 16:13 Uhr Rechner-Revolution

Von Thomas Schulz, San Francisco

Google und die US-Raumfahrtbehörde wollen bewiesen haben, dass Ouantencomputer funktionieren. Sie arbeiten nun an künstlicher Intelligenz. Ein Besuch an dem Ort, an dem angeblich gerade eine Revolution stattfindet. Hinter mehreren Sicherheitsschleusen am Ende eines verwinkelten Ganges im Nasa-Forschungszentrum in Nordkalifornien steht ein unauffälliger schwarzer Kasten, so groß wie ein Gartenhäuschen. In seinem Inneren herrschen Temperaturen nahe dem absoluten Nullpunkt, völlige Dunkelheit und totale Stille. Denn nur unter diesen Bedingungen funktioniert die Technik, mit deren Hilfe Google und die Nasa eine neue Computerrevolution einläuten wollen - die des Quantencomputers. Die daraus entstehenden Möglichkeiten seien enorm, glauben die beteiligten Wissenschaftler: Kluge Maschinen, mit denen sich schädliches Kohlendioxid direkt aus der Atmosphäre filtern lässt, Raumflüge zum Mars möglich werden und der Weg zur künstlichen Intelligenz nicht mehr weit scheint. Bislang war allerdings noch nicht einmal sicher, ob ein Quantencomputer überhaupt existieren kann. Die US-Raumfahrtbehörde und der Internetkonzern haben schon vor zwei Jahren begonnen, ihre Expertise in Datenverarbeitung und Physik zu bündeln, um gemeinsam an der Schnittstelle von Informatik und Quantenmechanik zu forschen. "Es funktioniert" Jetzt erst aber stellten Google und Nasa ihre Arbeit der Öffentlichkeit vor. Mit einer klaren Botschaft: "Es

Google und Nasa präsentieren Quantencomputer

funktioniert." Die Forscher seien nach vielen Grundlagentests nun bereit, "die nächste Generation von Quantencomputern zu bauen, mit denen echte, schwierige Probleme angegangen werden können", sagt Hartmut Neven, Leiter des Quantum Artificial Intelligence Laboratory von Google.

Druckversion - Rechner-Revolution: Google und Nasa präsentieren Qu... http://www.spiegel.de/netzwelt/web/google-und-nasa-praesentieren-ihr...

Neven stammt aus Aachen und promovierte am Institut für Neuroinformatik der Uni Bochum. Neben seinen Kollegen von der Nasa, im Anzug und mit Seitenscheitel, wirkt der deutsche Ingenieur eher wie ein Kreuzberger Szenewirt, mit abgerocktem schwarzem T-Shirt, silbernen Turnschuhen und zerrissener Jeans. Doch Neven gilt als einer der klügsten Köpfe unter den Google-Wissenschaftlern, schon lange tief abgetaucht in das seltsame, subatomare Reich der Quantenmechanik.

Selbst für die klügsten Wissenschaftler unfassbar kompliziert

Diese Welt ist selbst für die klügsten Wissenschaftler unfassbar kompliziert, weil sie - vereinfacht gesagt zwei gegensätzliche Zustände gleichzeitig erlaubt: an und aus, ja und nein. Eine Welt, in der eine Katze gleichzeitig tot und lebendig sein kann, so erklärte es der Physiker Erwin Schrödinger in einem berühmten Gedankenexperiment. Bislang glaubten die Experten, es würden noch Jahrzehnte vergehen, bis es einen Computer gibt, der die Gesetze der Quantenmechanik nutzen kann: 0 und 1 zur gleichen Zeit in einem sich überlagernden Zustand.

"Die Natur ist nicht zufrieden, wenn ein Objekt nur in einem einzigen Zustand existiert", sagt Neven. In der Chemie und der Biologie sei zu beobachten, dass die Welt nur funktionieren kann, weil sie viele sich überschneidende Formen zulässt. Deswegen, so Neven, habe schon einer der Väter der Quantenphysik, Richard Feynman, erkannt, dass ein herkömmlicher Computer die ganze Komplexität der Welt niemals abbilden könne. "Da die Quantenphysik das Betriebssystem der Natur ist, braucht es unweigerlich einen Quantencomputer, um sie zu bedienen", so Neven. Der Quantenchip sei der einzig natürliche Bewohner des Multiversums, in dem wir leben.

Die Nasa- und Google-Wissenschaftler träumen nun schon von Flugzeugen, die keinen menschlichen Piloten mehr brauchen, oder von klugen Maschinen, die etwa neuartige Batterien konstruieren, die hundertmal länger halten.

Der Kern der Maschine, der eigentliche Quantenchip, ist dabei kaum fingernagelgroß. Er sitzt fast unsichtbar am untersten Ende eines fast zwei Meter langen Gewirrs aus Kabeln, Metallplatten und Konduktoren. Sehr vereinfacht dargestellt funktioniert der Prozessor so: Im Zentrum steht das

1 von 2

17.05.2016 20:38

DIE NATURWISSENSCHAFTEN

23. Jahrgang

. .

29. November 1935

Heft 48

Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. Von E. Schrödinger, Oxford.

Inhaltsübersicht.

- § 1. Die Physik der Modelle.
- 2. Die Statistik der Modellvariablen in der Quantenmechanik. Beispiele für Wahrscheinlichkeitsvoraussagen. Kann man der Theorie ideale Gesamtheiten
- § 4. unterlegen? Sind die Variablen wirklich verwaschen?
- Der bewußte Wechsel des erkenntnistheoreti-6 tischen Standpunktes. Die ψ -Funktion als Katalog der Erwartung.
- Theorie des Messens, erster Teil. Die ψ -Funktion als Beschreibung des Zu-8.
- § 9. standes.
- Theorie des Messens, zweiter Teil. Die Aufhebung der Verschränkung. Das Er-gebnis abhängig vom Willen des Experimenδ II. tators.
- Ein Beispiel.
- § 13. Fortsetzung des Beispiels: alle möglichen Messungen sind eindeutig verschränkt.
- § 14. Die Änderung der Verschränkung mit der Zeit. Bedenken gegen die Sonderstellung der Zeit.
 § 15. Naturprinzip oder Rechenkunstgriff?
 - § 1. Die Physik der Modelle.

In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts war aus den großen Erfolgen der kinetischen Gastheorie und der mechanischen Theorie der Wärme ein Ideal der exakten Naturbeschreibung hervorgewachsen, das als Krönung jahrhundertelangen Forschens und Erfüllung jahrtausendealter Hoffnung einen Höhepunkt bildet und das klassische heißt. Dieses sind seine Züge.

Von den Naturobjekten, deren beobachtetes Verhalten man erfassen möchte, bildet man, ge-stützt auf die experimentellen Daten, die man besitzt, aber ohne der intuitiven Imagination zu wehren, eine Vorstellung, die in allen Details genau ausgearbeitet ist, *viel* genauer als irgendwelche Erfahrung in Ansehung ihres begrenzten Umfangs je verbürgen kann. Die Vorstellung in ihrer absoluten Bestimmtheit gleicht einem mathematischen Gebilde oder einer geometrischen Figur, welche aus einer Anzahl von Bestimmungsstücken ganz und gar berechnet werden kann; wie z. B. an einem Dreieck eine Seite und die zwei ihr anliegenden Winkel, als Bestimmungsstücke, den negenden winkel, als bestimmungsstucke, den dritten Winkel, die anderen zwei Seiten, die drei Höhen, den Radius des eingeschriebenen Kreises usw. mit bestimmen. Von einer geometrischen Figur unterscheidet sich die Vorstellung ihrem Wesen nach bloß durch den wichtigen Umstand, daß sie auch noch in der Zeit als vierter Dimension ebenso klar bestimmt ist wie jene in den drei Dimensionen des Raumes. Das heißt es handelt sich (was ja selbstverständlich ist) stets um ein

Nw. 1935

Gebilde, das sich mit der Zeit verändert, das verschiedene Zustände annehmen kann; und wenn ein Zustand durch die nötige Zahl von Bestimmungsstücken bekannt gemacht ist, so sind nicht nur alle anderen Stücke in diesem Augenblick mit gegeben (wie oben am Dreieck erläutert), sondern ganz ebenso alle Stücke, der genaue Zustand, zu jeder bestimmten späteren Zeit; ähnlich wie die Beschaffenheit eines Dreiecks an der Basis seine Beschaffenheit an der Spitze bestimmt. Es gehört mit zum inneren Gesetz des Gebildes, sich in bestimmter Weise zu verändern, das heißt, wenn es in einem bestimmten Anfangszustand sich selbst überlassen wird, eine bestimmte Folge von Zuständen kontinuierlich zu durchlaufen, deren jeden es zu ganz bestimmter Zeit erreicht. Das ist seine Natur, das ist die Hypothese, die man, wie ich oben sagte, auf Grund intuitiver Imagination setzt.

Natürlich ist man nicht so einfältig zu denken, daß solchermaßen zu erraten sei, wie es auf der Welt wirklich zugeht. Um anzudeuten, daß man das nicht denkt, nennt man den präzisen Denkbehelf, den man sich geschaffen hat, gern ein Bild oder ein Modell. Mit seiner nachsichtslosen Klarheit, die ohne Willkür nicht herbeizuführen ist, hat man es lediglich darauf abgesehen, daß eine ganz bestimmte Hypothese in ihren Folgen geprüft werden kann, ohne neuer Willkür Raum zu geben während der langwierigen Rechnungen, durch die man Folgerungen ableitet. Da hat man gebundene Marschroute und errechnet eigentlich nur, was ein kluger Hans aus den Daten direkt herauslesen würde! Man weiß dann wenigstens, wo die Willkür steckt und wo man zu bessern hat, wenn's mit der Erfahrung nicht stimmt: in der Ausgangshypothese, im Modell. Dazu muß man stets bereit sein. Wenn bei vielen verschiedenartigen Experimenten das Naturobjekt sich wirklich so benimmt wie das Modell, so freut man sich und denkt, daß unser Bild in den wesentlichen Zügen der Wirklichkeit gemäß ist. Stimmt es bei einem neuartigen Experiment oder bei Verfeinerung der Meßtechnik nicht mehr, so ist nicht gesagt, daß man sich nicht freut. Denn im Grunde ist das die Art, wie allmählich eine immer bessere Anpassung des Bildes, das heißt unserer Gedanken, an die Tatsachen gelingen kann. Die klassische Methode des präzisen Modells

hat den Hauptzweck, die unvermeidliche Willkür in den Annahmen sauber isoliert zu halten, ich möchte fast sagen wie der Körper das Keimplasma, für den historischen Anpassungsprozeß an die fortschreitende Erfahrung. Vielleicht liegt der










